

# LAUREA TRIENNALE IN INGEGNERIA MECCANICA

## Ottimizzazione strutturale della biella di un motore a quattro tempi: dalla simulazione FEM ad alta fedeltà all'intelligenza artificiale

### **Relatore:**

Prof. Marco Evangelos Biancolini **Correlatori:** Ing. Andrea Chiappa Ing. Emanuele Di Meo

Ing. Riccardo Testi

Candidato: Danilo Lampasona

A.A. 2023/2024

#### Sommario

Il presente lavoro ha come obiettivo l'ottimizzazione strutturale di una biella appartenente a un motore monocilindrico a quattro tempi alimentato a benzina, il cui regime di funzionamento varia da 6500 a 10600 RPM, sviluppato dall'azienda  $Piaggio^{(R)}$ . La tesi si basa sull'analisi di due modelli forniti in ambiente Ansys  $Workbench^{(R)}$ : uno per la validazione strutturale del pistone e uno per la validazione della biella. A supporto, sono stati resi disponibili dati cinematici e dinamici ottenuti da analisi *multibody*, simulando il comportamento del motore al banco prova.

In una fase iniziale, è stata condotta l'analisi cinematica e dinamica del manovellismo di spinta mediante codici sviluppati in  $MATLAB^{(\mathbb{R})}$ . La validazione dei modelli è avvenuta attraverso il confronto con i dati aziendali: inizialmente per configurazioni angolari specifiche della manovella, utilizzando la costruzione A-K e i diagrammi polari, successivamente su tutto lo spettro di funzionamento del motore. Nel caso del secondo modello, relativo alla biella, è stato possibile confrontare anche i risultati dinamici ottenuti non considerando l'accelerazione angolare della manovella, rispetto ai dati forniti.

Successivamente si è passati all'analisi strutturale FEM della biella, con l'obiettivo di individuare la configurazione di carico più gravosa, corrispondente al regime di 6500 RPM e alla massima pressione di combustione. L'area maggiormente sollecitata è risultata essere un raccordo localizzato al di sotto dell'occhio grande della biella.

La campagna di simulazioni impostata con DoE, è stata eseguita tramite mesh morphing basato su Radial Basis Functions (RBF), impiegando il software RBF Morph<sup> $\mathbb{M}$ </sup>. Per l'ottimizzazione di forma sono stati definiti sette parametri geometrici che operano sulla geometria del raccordo, sullo stelo e sul materiale attorno l'occhio grande e piccolo. Gli output monitorati sono stati: la massima tensione equivalente di Von Mises, il volume totale e lo spostamento del baricentro rispetto alla configurazione iniziale, calcolato mediante command APDL. Sono state condotte due campagne di ottimizzazione con Response Surface: la prima mirata alla riduzione della tensione massima, mantenendo invariati volume e baricentro; la seconda alla riduzione della massa, preservando il valore massimo di tensione.

Le configurazioni ottimizzate sono state sottoposte ad analisi a *buckling* e analisi modale, per garantire l'assenza di instabilità strutturale e una dinamica simile al modello di partenza. A conclusione del lavoro, è stato costruito un *Reduced Order Model* (ROM) statico, validato confrontando i risultati ottenuti sulle due configurazioni ottimizzate, non incluse nel *data set* del ROM, con i corrispondenti risultati FEM. L'errore riscontrato è risultato compatibile con il margine massimo stimato dal ROM, confermando l'affidabilità del modello ridotto nel range parametrico analizzato.

# Indice

1	Analisi Manovellismo di Spinta			
	1.1	Funzionamento di un motore a combustione interna	2	
	1.2	Cinematica del manovellismo di spinta	7	
		1.2.1 Analisi posizioni, velocità e accelerazioni	7	
		1.2.2 Gradi di libertà e configurazioni critiche	11	
	1.3	Dinamica del manovellismo di spinta	14	
<b>2</b>	Ana	alisi cinematica e dinamica del sistema reale	18	
	2.1	Workflow dell'analisi strutturale <i>Piaggio</i>	18	
	2.2	Verifica cinematica per la validazione del pistone	24	
	2.3	Verifica cinematica e dinamica per la validazione della biella	39	
	2.4	Codici MATLAB	47	
		2.4.1 Codici modello <i>Piaggio</i> per analisi pistone	47	
		2.4.2 Codici modello <i>Piaggio</i> per analisi biella	58	
3	Ana	alisi agli elementi finiti	63	
	3.1	Introduzione	63	
	3.2	Fondamenti del metodo agli elementi finiti	64	
	3.3	Condizione di carico più gravosa	73	
	3.4	Verifica strutturale della configurazione di base $(Baseline)$	78	
<b>4</b>	Ott	imizzazione	84	
4	<b>Ott</b> 4.1	<b>imizzazione</b> Principi di ottimizzazione numerica	<b>84</b> 84	
4	<b>Ott</b> 4.1 4.2	<b>imizzazione</b> Principi di ottimizzazione numerica	<b>84</b> 84 88	
4	<b>Ott</b> 4.1 4.2 4.3	imizzazionePrincipi di ottimizzazione numericaFunzioni a base radiale (RBF)Setup ottimizzazione	<b>84</b> 84 88 92	
4	<b>Ott</b> 4.1 4.2 4.3	imizzazionePrincipi di ottimizzazione numericaFunzioni a base radiale (RBF)Setup ottimizzazione4.3.1Parametrizzazione della mesh	<b>84</b> 84 88 92 93	

	4.3.3 Command APDL per lo spostamento del baricentro	106
	4.3.4 Design of Experiments (DoE) $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	107
	4.4 Risultati dell'ottimizzazione	110
	4.5 Verifica a $buckling$	115
	4.5.1 Applicazione al caso studio	118
	4.6 Analisi modale	126
	4.6.1 Cenni teorici sull'analisi modale	126
	4.6.2 Applicazione al caso studio	127
<b>5</b>	Modello di ordine ridotto (ROM)	131
	5.1 Fondamenti sui modelli di ordine ridotto	132
	5.2 Risultati ROM	136
6	Conclusioni	143
<b>7</b>	Ringraziamenti	152

## Elenco degli acronimi

- MCI Motore a Combustione Interna
- AC Accensione Comandata
- **AS** Accensione Spontanea
- ${\bf PMS}\,$ Punto Morto Superiore
- ${\bf PMI}~$  Punto Morto Inferiore
- GdL Gradi di Libertà
- **CIR** Centro di Istantanea Rotazione
- ${\bf CAD}\,$  Computer-Aided Design
- ${\bf FEM}\,$  Finite Element Method
- **EF** Elemento Finito
- WB Workbench
- **DP** Design Point
- **DoE** Design of Experiments
- LHS Latin Hypercube Sampling
- **CP** Candidate Point
- ${\bf RBF}\,$  Radial Basis Function
- ${\bf ROM}\,$  Reduced Order Model

## 1 Analisi Manovellismo di Spinta

In questo capitolo verrà analizzato il problema dell'analisi del manovellismo di spinta sia dal punto di vista cinematico che dinamico, verranno trovate le equazioni che ne governano il moto. Prima tuttavia è bene fare una panoramica del funzionamento di un motore quattro tempi e in particolare bisogna fare luce su alcuni aspetti che giorno dopo giorno diventano sempre più importanti ovvero: il suo impatto ambientale e gli sviluppi futuri della propulsione terrestre.

I motori a combustione interna (MCI), in particolare quelli a quattro tempi, rappresentano da decenni una delle principali soluzioni per la propulsione dei veicoli stradali. Tuttavia, dal punto di vista ambientale, pongono criticità rilevanti legate alla produzione di anidride carbonica (CO<sub>2</sub>), il principale gas climalterante responsabile dell'effetto serra. A differenza di altri inquinanti regolati da normative e oggi efficacemente abbattuti grazie a sistemi come i catalizzatori, la CO<sub>2</sub> è il prodotto inevitabile della combustione di carburanti fossili e rappresenta il principale driver della transizione verso sistemi di mobilità a basse emissioni.

In questo contesto, la propulsione elettrica alimentata da fonti rinnovabili costituisce la direzione privilegiata per il futuro della mobilità sostenibile. I motori elettrici, infatti, non solo sono più efficienti, ma possono essere alimentati da energia prodotta senza emissioni dirette di  $CO_2$ . Accanto a questa soluzione, una possibile alternativa è rappresentata dall'idrogeno, vettore energetico versatile che può essere utilizzato sia per alimentare celle a combustibile nei veicoli elettrici, sia come combustibile nei motori a combustione interna opportunamente adattati.

Nonostante la crescente diffusione della mobilità elettrica, lo studio dei MCI mantiene tuttora un ruolo centrale, soprattutto nel settore delle due ruote, dove il motore a combustione continua a garantire compattezza, autonomia e densità energetica. Inoltre, nei veicoli ibridi, i MCI lavorano in sinergia con motori elettrici per ottimizzare consumi ed emissioni, adattandosi alle diverse condizioni operative. L'ottimizzazione dei MCI resta quindi strategica per migliorare l'efficienza dei sistemi ibridi, soprattutto in una fase di transizione tecnologica in cui la diffusione su larga scala di veicoli elettrici è ancora ostacolata da limitazioni economiche e infrastrutturali.

In questo scenario, approfondire la comprensione e il miglioramento dei motori a combustione interna non è solo attuale, ma essenziale per affrontare in modo concreto e realistico la transizione energetica verso una mobilità a zero emissioni.

### 1.1 Funzionamento di un motore a combustione interna

I motori a combustione interna consentono la conversione dell'energia chimica contenuta nel combustibile in energia meccanica, finalizzata alla trazione del veicolo. Tra i principali organi meccanici che concorrono a questo processo vi è il manovellismo di spinta, un dispositivo che consente la trasformazione del moto da lineare a rotatorio e viceversa.

Una caratteristica distintiva dei MCI rispetto ad altri sistemi termodinamici, come gli impianti a gas o a vapore, è il fatto che tutte le fasi del ciclo - compressione, combustione, espansione e scarico — si svolgono all'interno di un unico componente, ovvero la macchina. In questo modo, non è più possibile distinguere fisicamente elementi separati come scambiatori di calore, turbine o compressori, che invece risultano ben identificabili in altri sistemi di conversione dell'energia. Una prima importante distinzione nei MCI riguarda la tipologia di accensione [8]:

- Ad accensione comandata (AC), ovvero funzionanti secondo ciclo Otto, da Nikolaus August Otto, ingegnere tedesco. In questi motori la miscela di aria e carburante viene accesa da un organo esterno, come una candela.
- Ad accensione spontanea (AS), ovvero funzionanti secondo ciclo Diesel, da August Diesel, anch'egli ingegnere tedesco. In questi motori si ha l'autoaccensione della miscela.

I motori funzionanti secondo ciclo Otto sono adatti alle basse potenze, dal kW di potenza fino al MW, principalmente nell'autotrazione e in casi particolari nel campo nautico e cogenerativo. Eccezione fanno i motori Otto a gas naturale che possono arrivare fino a 20 MW di potenza. I motori funzionanti secondo ciclo Diesel sono utilizzabili per un campo di potenze più grande fino alla propulsione navale con 100MW di potenza. La Figura 1.1 fa riferimento alle caratteristiche cinematiche e geometriche dei MCI. Possiamo identificare il punto morto superiore (PMS), ovvero la posizione in cui il pistone si trova più vicino alla testa del cilindro; il punto morto inferiore (PMI) è la posizione in cui invece il pistone si trova più lontano dalla testa del cilindro. La biella è l'organo che unisce pistone, per mezzo dello spinotto, all'albero motore che ruota con velocità angolare  $\omega$ . Per semplicità, dal punto di vista cinematico, si va a identificare la manovella, ovvero l'organo che collega l'asse di rotazione del motore (cerniera fissa al telaio) al bottone di biella. Il piede di biella identifica l'asse dello spinotto; invece, la distanza che si ha tra piede di biella e bottone di biella è il raggio di manovella  $(R_M)$ . La corsa è la distanza che si ha tra PMS e PMI corrispondente a due volte il raggio di manovella. L'alesaggio è il diametro interno del cilindro, la cilindrata è il volume spazzato dal pistone durante una corsa.  $V_{CC}$  è il volume della camera di combustione ovvero il volume che si ha tra cielo del pistone e testa del cilindro al PMS. Alcune grandezze caratterizzanti del motore sono corsa fratto alesaggio e rapporto di compressione volumetrico, pari al volume totale del cilindro fratto il volume della camera di combustione. Nell'immagine possiamo anche osservare le valvole di aspirazione e di scarico oltre all'iniettore o alla candela a seconda che si tratti rispettivamente di un motore ad AS o AC.

Ora andiamo ad analizzare il funzionamento di un motore 4T.

- 1. Aspirazione: il pistone di muove dal PMS al PMI con valvola di aspirazione aperta e quella di scarico chiusa. Si aspira all'interno del cilindro della carica fresca;
- 2. Compressione: il pistone si muove dal PMI al PMS a valvole chiuse e poco prima del PMS si ha l'inizio della combustione;
- 3. Combustione-espansione: la fase di combustione avviene a cavallo del PMS e culmina con l'espansione dei gas combusti che spingono il pistone al PMI. In questa fase si compie lavoro;
- 4. Scarico: dal PMI al PMS con la valvola di scarico aperta e quella di aspirazione chiusa si espellono i gas combusti. La fase si divide in due sottofasi: scarico spontaneo in prossimità del PMI in cui si ha la fuoriuscita dei gas dettata dalla grande differenza di pressione, e scarico forzato dettato dalla corsa del pistone.

Nella realtà al fine di ridurre le perdite di carico e migliorare la fase di ricambio della carica si ricorre ad un'opportuna fasatura, variando gli istanti di apertura



Figura 1.1: Motore a combustione interna

e chiusura delle valvole con anticipi e ritardi. I motori ad AC ed AS differiscono principalmente per i seguenti aspetti: tipo di carica che si aspira, valore della dosatura e tipologia di combustione con conseguente variazione dei cicli termodinamici di riferimento per lo studio. Nei motori funzionanti secondo ciclo Otto si aspira una miscela di aria e combustibile già miscelata in arrivo dal carburatore. Nei cicli Diesel si aspira solo aria e poco prima del PMS l'iniettore provvederà all'iniezione del carburante. Per dosatura  $\alpha$  si definisce il rapporto tra massa di aria e massa di combustibile. Nelle condizioni in cui l'aria sia quella strettamente necessaria per far avvenire la reazione di combustione, la dosatura si trova al rapporto stechiometrico ( $\alpha_{ST}$ ). Tendenzialmente nei motori ad AC si lavora circa al rapporto stechiometrico ( $\alpha = 14/18$ ), mentre nei motori ad accensione spontanea si lavora in un eccesso di aria. La principale differenza, tuttavia, è nella tipologia di combustione. Nei motori funzionanti secondo ciclo Otto la combustione viene innescata dalla candela che genera un arco elettrico che raggiunge temperature elevatissime. Da questo primo nucleo si ha la propagazione rapida del fronte di fiamma

ad una velocità di circa 20-30 m/s. Nei motori Otto si vuole che la combustione avvenga il più velocemente possibile per scongiurare il pericolo della detonazione, ovvero l'autoaccensione della miscela causata da elevati valori di temperatura e pressioni, accensione spontanea che avviene lontano dal primo nucleo. L'autoaccensione potrebbe avvenire poiché il fronte di fiamma, propagandosi, comprime e riscalda la miscela che si trova davanti. Nei casi in cui dovesse presentarsi l'autoaccensione della miscela, questa si manifesterebbe con un caratteristico rumore chiamato *battito in testa*, un rumore metallico che proviene dal cilindro. Tra le varie precauzioni che si adottano per limitare questo fenomeno troviamo: utilizzo di un combustibile avente un elevato ritardo all'accensione, l'uso di rapporti di compressione contenuti ( $\beta = 10 - 12$ ) e l'adozione di velocità di rotazione elevate del motore per incrementare la turbolenza con conseguente aumento della velocità di propagazione del fronte di fiamma. Al contrario nei motori funzionanti secondo ciclo Diesel si ricerca la detonazione della miscela adottando elevati rapporti di compressione ( $\beta = 15 - 20$ ). In questi motori si vuole ridurre il più possibile il ritardo all'accensione, in questo caso si parla sia di ritardi fisici che di ritardi chimici. I ritardi fisici sono causati dal tempo necessario per far evaporare le goccioline iniettate e poi per farle miscelare, per questo motivo si utilizzano i common rail, dei dispositivi che permettono di iniettare il combustibile a pressioni elevatissime (circa 2000 Bar), ragion per cui nei motori Diesel si prediligono dei combustibili a bassa viscosità. In particolare, il ritardo fisico nei motori Otto è già scontato in quanto si ha la premiscelazione nel carburatore. I tempi chimici invece sono i tempi necessari affinché possa iniziare la fase di combustione dalla formazione della miscela, per questo nei motori Diesel si scelgono dei combustibili con basso ritardo all'accensione. Nonostante questi accorgimenti i motori Diesel non riescono comunque ad adeguare il tempo di combustione al numero di giri, quindi si possono ottenere delle velocità di rotazione dell'ordine dei 5000 giri/minuto.

Queste differenze si riflettono direttamente sul ciclo termodinamico ideale di riferimento che si adotta per i due motori. Consideriamo un circuito chiuso con macchina ideale e fluido evolvente reale. Le fasi di espansione e compressione vengono considerate come isoentropiche e lo scarico spontaneo come isocoro in quanto ipotizziamo che esso sia talmente veloce che il pistone, a causa della sua inerzia, non abbia il tempo di accorgersi della variazione di pressione. I cicli di riferimento sono il ciclo Beau De Rochas in cui si considera un'acquisizione di calore isocora, e il ciclo Diesel nel quale si considera un'adduzione di calore isobara. Un compromesso tra i due è il ciclo Sabathé in cui si considera prima un'adduzione di calore isocora ed in seguito isobara. I cicli a confronto si possono vedere in Figura





Figura 1.2: (a) ciclo Beau de Rochas, (b) ciclo Diesel, (c) ciclo Sabathé.

Nei motori ad accensione comandata, date le loro elevate velocità, la combustione può essere vista al limite come istantanea se si considerano infiniti punti di accensione, per questo in tali motori si adotta il ciclo Beau De Rochas. Il ciclo Diesel invece può essere preso come riferimento solo per i grandi motori caratterizzati da un numero di giri dell'ordine dei 100 giri/min in cui si può ipotizzare che l'aumento di pressione causato dalla combustione sia compensato dall'abbassamento del pistone verso il PMI. In entrambi i casi il ciclo di riferimento ideale più rappresentativo sarebbe il ciclo Sabathé adattandolo ai due motori dando un peso maggiore o minore alla fase di adduzione di calore a volume o pressione costante. Per approfondire lo studio dei due motori potrebbe essere utile lo studio del ciclo limite, ovvero un ciclo che si traccia considerando una macchina perfetta ma un fluido reale per poter evidenziare quelli che sono i margini di miglioramento delle tecnologie esistenti. Infine potrebbe essere cruciale lo studio del ciclo reale, cioè quello che si ricava da una macchina e un fluido reale. Tale ciclo può essere ricavato sia sperimentalmente che con accurati modelli di calcolo. Il ciclo reale viene ricavato sperimentalmente utilizzando dei trasduttori di pressione nel cilindro e un sensore che rileva l'angolo di manovella (con conseguente informazione sulla posizione del pistone). La limitazione del rapporto di compressione adottabile nei cicli Otto, comporta, in genere, un miglior rendimento termodinamico nei motori Diesel.

#### 1.2 Cinematica del manovellismo di spinta

Ora affronteremo il problema dell'analisi cinematica del manovellismo di spinta in cui troveremo tutte le relazioni cinematiche di nostro interesse. L'analisi cinematica si comporrà di tre parti: analisi delle posizioni, analisi delle velocità e analisi delle accelerazioni. Nel caso del manovellismo di spinta vedremo che trovare le relazioni sarà particolarmente facile in quanto si tratterà di risolvere dei sistemi lineari. Per trattare il caso più generale possibile si è deciso di studiare un manovellismo di spinta decentrato, ovvero in cui l'asse del cilindro non passa per la cerniera fissa. Nell'algoritmo sviluppato per ammettere il caso di manovellismo decentrato introdurremo l'angolo di decentramento  $\gamma$  che misura l'angolo che si crea quando il pistone si trova al PMS tra asse del cilindro e biella. La notazione che verrà presa in esame sarà quella presentata in Figura 1.3.



Figura 1.3: Manovellismo di spinta

#### 1.2.1 Analisi posizioni, velocità e accelerazioni

Il primo passo per avviare l'analisi delle posizioni consiste nel definire un percorso chiuso mediante vettori, al quale si potrà associare una corrispondente equazione di chiusura. Il verso di percorrenza del circuito, se orario o antiorario, è arbitrario. Dopo questa operazione, il meccanismo si presenterà nella seguente maniera (Figura 1.4).

L'equazione di chiusura associata sarà:  $\vec{Z_1} + \vec{Z_2} + \vec{Z_3} + \vec{Z_4} = 0$ . Ora immaginando di rappresentare i vettori nel piano di Argand-Gauss, scriviamoli nella forma



Figura 1.4: Equazione di chiusura

esponenziale:

$$\begin{cases}
\vec{Z}_1 = re^{i\alpha} \\
\vec{Z}_2 = le^{i\theta} \\
\vec{Z}_3 = ke^{i\frac{3}{2}\pi} \\
\vec{Z}_4 = se^{i\pi}
\end{cases}$$
(1.1)

Dove k è la distanza verticale tra l'asse del cilindro e la cerniera fissa mentre s è la posizione del centro della coppia rotoidale del pattino rispetto alla cerniera fissa. Ora separiamo la parte reale da quella immaginaria e otteniamo:

$$\begin{cases} r\sin\alpha + l\sin\theta - k = 0\\ r\cos\alpha + l\cos\theta - s = 0 \end{cases}$$
(1.2)

Se  $\alpha$  è imposto, come nel nostro caso in quanto la manovella è il membro movente, possiamo trovare agevolmente  $\theta$ :

$$\begin{cases} l\sin\theta = k - r\sin\alpha\\ l\cos\theta = s - r\cos\alpha \end{cases}$$
(1.3)

Dividendo le due equazioni otteniamo che  $\theta = \operatorname{atan2}(k - r \sin \alpha, s - r \cos \alpha)$ . Ricorriamo alla funzione *atan2* di *MATLAB* in quanto ci restituisce l'angolo nel quadrante corretto e si è potuto eliminare l in quanto è sempre positivo e non varia il risultato dell'angolo ricavato dalla precedente espressione. Se invece quadriamo e sommiamo le equazioni del sistema 1.3 possiamo ricavare s.

$$l^{2} = k^{2} + r^{2} \sin^{2} \alpha - 2kr \sin \alpha + s^{2} + r^{2} \cos^{2} \alpha - 2sr \cos \alpha$$
(1.4)

Ora utilizzando la relazione fondamentale della goniometria, ovvero:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Quindi otteniamo:

$$l^{2} = r^{2} + k^{2} + s^{2} - 2kr\sin\alpha - 2sr\cos\alpha$$
(1.5)

Ora portiamo  $l^2$  a destra e otteniamo:

$$s^{2} - 2sr\cos\alpha + r^{2} + k^{2} - l^{2} - 2kr\sin\alpha = 0$$
(1.6)

Che risulta essere un'equazione di secondo grado la cui soluzione è:

$$s_{1,2} = r \cos \alpha \pm \sqrt{r^2 \cos^2 \alpha - r^2 + l^2 - k^2 + 2kr \sin \alpha}$$
(1.7)

Che sono due soluzioni reali e distinte in quanto k, se esiste, è di piccola entità, mentre  $r^2$  è molto inferiore a  $l^2$  per i motori automobilistici. Ora particolarizzando la relazione scritta in precedenza  $\theta = \operatorname{atan2}(k - r \sin \alpha, s - r \cos \alpha)$  in un caso con  $s = s_1$  e nell'altro con  $s = s_2$  otteniamo due valori distinti di  $\theta$  ( $\theta_1 \in \theta_2$ ) corrispondenti al medesimo angolo  $\alpha$  di manovella. Per visualizzarle graficamente si prenda in considerazione la Figura 1.5. Tra le due soluzioni possibili decidiamo di scegliere solo quella positiva in quanto in un ciclo di funzionamento del motore bisognerebbe smontare il manovellismo per passare da una configurazione all'altra.

Come anticipato, nel codice *MATLAB* introdurremo un angolo di decentramento  $\gamma$  positivo se preso in verso orario, tra asse cilindro e biella. Possiamo scrivere che  $k = (r + l) \sin \gamma$ .

Ora ci occupiamo dell'analisi delle velocità. Derivando il sistema 1.2 otteniamo:

$$\begin{cases} \omega_1 r \cos \alpha + \omega_2 l \cos \theta = 0\\ -\omega_1 r \sin \alpha - \omega_2 l \sin \theta - \dot{s} = 0 \end{cases}$$
(1.8)

Dove  $\omega_1$  è la velocità angolare della manovella che conosciamo in quanto sappiamo a quali RPM gira il motore (ad esempio a 6000, 8000 o 9000 RPM), invece  $\omega_2$  è la velocità angolare della biella e  $\dot{s}$  la velocità del pistone. Come anticipato



Figura 1.5: Configurazioni del manovellismo corrispondenti al medesimo angolo  $\alpha$ 

in precedenza, si tratta di un sistema lineare in incognite  $\omega_2$  e  $\dot{s}$ . Il sistema può essere riscritto in forma matriciale nella seguente maniera:

$$\begin{bmatrix} l\cos\theta & 0\\ l\sin\theta & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} \omega_2\\ \dot{s} \end{cases} = \begin{cases} -r\cos\alpha\\ -r\sin\alpha \end{cases} \omega_1$$
(1.9)

In particolare dalla prima equazione possiamo ricavare direttamente  $\omega_2$ :

$$\begin{cases} \omega_2 = \frac{-\omega_1 r \sin \alpha}{l \cos \theta} \\ \dot{s} = -\omega_1 r \sin \alpha - \omega_2 l \sin \theta \end{cases}$$
(1.10)

In cui  $\cos \theta$  è sempre diverso da zero per i manovellismi automobilistici. Il codice non appena calcolerà  $\omega_2$  lo sostituirà nella seconda formula per calcolarsi  $\dot{s}$ .

Passando ora all'analisi delle accelerazioni, derivando ulteriormente il sistema 1.8 otteniamo:

$$\begin{cases} \omega_1^2 r \cos \alpha + \alpha_1 l \sin \alpha + \omega_2^2 l \cos \theta + \alpha_2 l \sin \theta + \ddot{s} = 0\\ -\omega_1^2 r \sin \alpha + \alpha_1 r \cos \alpha - \omega_2^2 l \sin \alpha + \alpha_2 l \cos \theta = 0 \end{cases}$$
(1.11)

Ora scriviamo questo sistema in forma matriciale sapendo che  $\alpha_2$  e  $\ddot{s}$ , rispettivamente accelerazione angolare della biella e accelerazione del pistone, sono le nostre incognite:

$$\begin{bmatrix} l\sin\theta & 1\\ l\cos\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} \alpha_2\\ \ddot{s} \end{cases} = \begin{bmatrix} -r\cos\alpha & -l\sin\alpha & -l\cos\theta\\ r\sin\alpha & -r\cos\alpha & l\sin\theta \end{bmatrix} \begin{cases} \omega_1^2\\ \alpha_1\\ \omega_2^2 \end{cases}$$
(1.12)

Ipotizzando di conoscere  $\alpha_1$ , dalla seconda equazione ricaviamo subito  $\alpha_2$  che può essere sostituito nella prima per trovare  $\ddot{s}$ :

$$\begin{cases} \alpha_2 = \frac{\omega_1^2 r \sin \alpha + \omega_2^2 l \sin \theta - \alpha_1 r \cos \alpha}{l \cos \theta} \\ \ddot{s} = -\omega_1^2 r \cos \alpha - \omega_2^2 l \cos \theta - \alpha_2 l \sin \theta - \alpha_1 r \sin \alpha \end{cases}$$
(1.13)

Si passa ora all'analisi cinematica del baricentro della biella. Nota la geometria del manovellismo di spinta e avendo già determinato le velocità e le accelerazioni, sia angolari che lineari, dei singoli membri, è possibile ricavare tutte le grandezze cinematiche associate al baricentro della biella. Facendo riferimento alla Figura 1.3, la posizione del baricentro può essere espressa come:

$$\begin{cases} X_G = r \cos \alpha + d \cos \theta \\ Y_G = -(l-d) \sin \theta + k \end{cases}$$
(1.14)

In alternativa la seconda equazione poteva essere scritta come:  $Y_G = r \sin \alpha + d \sin \theta$ . Derivando il sistema otteniamo:

$$\begin{cases} v_{G,x} = -\omega_1 r \sin \alpha - \omega_2 d \sin \theta \\ v_{G,y} = \omega_2 (d-l) \cos \theta \end{cases}$$
(1.15)

Oppure in alternativa  $v_{G,y} = \omega_1 r \cos \alpha + \omega_2 d \cos \theta$ . Derivando ulteriormente ricaviamo le accelerazioni:

$$\begin{cases} a_{G,x} = -\omega_1^2 r \cos \alpha - \alpha_1 r \sin \alpha - \omega_2^2 d \cos \theta - \alpha_2 d \sin \theta \\ a_{G,y} = -\omega_2^2 (d-l) \sin \theta + \alpha_2 (d-l) \cos \theta \end{cases}$$
(1.16)

Similmente possiamo ottenere in alternativa:  $a_{G,y} = -\omega_1^2 r \cos \alpha + \alpha_1 r \cos \alpha - \omega_2^2 d \sin \theta + \alpha_2 d \cos \theta$ . In tutte queste relazioni, facendo l'ipotesi che la massa e l'inerzia del volano siano state ben calcolate, in condizioni ideali si può considerare l'accelerazione angolare della manovella sia pari a zero. Per motivi che in seguito verranno esposti, questa ipotesi per noi non è valida.

#### 1.2.2 Gradi di libertà e configurazioni critiche

Il calcolo dei gradi di libertà (GdL) per un manovellismo di spinta potrebbe sembrare una cosa immediata, tuttavia dal sistema 1.9 si può osservare come il determinante della matrice si possa annullare. Per spiegare quanto accade, facciamo un passo indietro e studiamo i metodi che possono essere usati per calcolare i gradi di libertà in un meccanismo.

Innanzitutto definiamo cosa si intende per GdL: per GdL si intende il numero di moti indipendenti che devono essere prescritti affinché sia univocamente determinato il moto di tutti i membri del meccanismo. Nella trattazione che faremo si dovranno adottare delle ipotesi semplificative, ovvero: trattare tutti i membri come corpi rigidi, assenza di giochi, geometria ideale e assenza di attriti tra corpi. I metodi di calcolo dei GdL si dividono in due categorie [5], ovvero: metodi topologici e metodi analitici. Nei metodi topologici si fanno solo considerazioni sulla struttura cinematica del meccanismo, senza tener conto della sua geometria. I metodi analitici, invece, tengono conto della geometria del meccanismo.

I metodi topologici si basano sul fatto che il numero di GdL si può calcolare come GdL dei membri svincolati meno il numero dei gradi di vincolo introdotti. Lo sviluppo di questa formula nel caso di meccanismo piano ci porta alla formula di Grübler; invece, la formula di Kutzbach è la generalizzazione sia per meccanismi spaziali che non. La formula di Grübler è  $F = 3(l-1)-2J_1-J_2$ , dove l è il numero di membri (nel nostro caso quattro: telaio, manovella, biella e pistone) e  $J_i$  è il numero di coppie cinematiche aventi *i* GdL (nel nostro caso solo  $J_1$ ). Possiamo scrivere che  $F = 3(4-1) - 2 \cdot 4 = 1$ ; infatti, se si ruota la manovella di un angolo  $d\theta$  si avrà uno spostamento del pistone ds. Limiti di questa formula sono che non tiene conto di che membro svolge il ruolo di movente, non ammette il fatto che il numero di GdL può cambiare durante il funzionamento di un meccanismo per determinate configurazioni e non considera i GdL oziosi, ovvero quei GdL che non influenzano la relazione tra movente e cedente.

Per superare alcuni di questi limiti si possono usare i metodi analitici, primo tra i quali troviamo il metodo di Hertz-Whittaker. Immaginiamo di indicare con  $q_1, q_2...q_n$  le variabili impiegate per stabilire la configurazione del sistema: nel nostro caso  $\alpha$ ,  $\theta \in s$ . Indico con  $\delta q_1, \delta q_2...\delta q_n$  le variazioni infinitesime tra queste variabili. Sia m il numero di relazioni indipendenti che si possono scrivere tra le n variabili: è lecito pensare che F = n - m. Poiché si può scrivere che  $\delta q_i = \frac{\delta q_i}{dt}$ , possiamo dire che m equivale al numero di relazioni indipendenti che si possono stabilire tra le velocità dei membri. Le relazioni che legano le derivate delle variabili di posizione alla velocità sono lineari come abbiamo già potuto osservare nell'analisi delle velocità. A questo punto, conoscendo il sistema 1.9, sappiamo che il numero di relazioni indipendenti che si possono scrivere tra le velocità (m) è pari al rango della matrice dei coefficienti. Per un generico meccanismo il sistema 1.9 si può riscrivere come:

$$[J]\{w\} = \{b\} \tag{1.17}$$

Dove J prende il nome di matrice *Jacobiana*. Ovvero l'equazione scritta prima diventa F = n - r, dove r è pari al rango della matrice Jacobiana. Quindi possiamo dire che il numero di GdL di un meccanismo rimane stabile fino a quando non cambia il rango della matrice J, dall'algebra lineare sappiamo tuttavia che il rango di una matrice quadrata differisce da quello massimo se il suo determinante è uguale a 0. In un meccanismo le configurazioni tali per cui det[J] = 0 vengono dette *configurazioni critiche*. Bisogna stare attenti alle configurazioni critiche in quanto il repentino aumento del numero di GdL, se non valutato, potrebbe portare a catastrofi. Le formule di Grübler e Kutzbach funzionano quando le equazioni di vincolo sono indipendenti, ma dato che spesso le equazioni di vincolo sono sulle posizioni e l'analisi delle posizioni spesso è non lineare, noi non conosciamo un modo per stabilire quando delle relazioni non lineari sono indipendenti, per questo motivo bisogna passare per l'analisi delle velocità. Fare l'analisi delle velocità comporta una derivazione del sistema che porta all'impossibilità di fare previsioni sull'indipendenza delle funzioni di vincolo globalmente, ma le si possono fare solo localmente.

Nel nostro caso abbiamo che n è pari a tre in quanto le variabili impiegate per stabilire la configurazione del sistema sono:  $\alpha$ ,  $\theta$  ed s. Il rango massimo della matrice J è uguale a due. Ora vediamo quando il determinante di J è uguale a zero:

$$det[J] = -l\cos\theta \tag{1.18}$$

Il determinante si annulla quando  $\theta$  è uguale a 90° oppure 270° (più 360°), coincidenti con le due configurazioni in alto in Figura 1.6. Tuttavia, tale configurazione risulta geometricamente critica, ma nel nostro caso specifico, è impossibile in quanto si ha l > r. Difatti, come si osserverà nei due motori analizzati, il range dell'angolo  $\theta$  oscilla tra 17,4° e -17,4°.

Va inoltre considerato che, nella realtà, nei motori a combustione interna (MCI) il pistone costituisce l'elemento movente e non la manovella. Di conseguenza, il sistema 1.9 andrebbe risolto rispetto a  $\omega_1$  e  $\omega_2$ . Annullando il determinante della nuova matrice *Jacobiana* si ottiene:

$$det[J] = rl\sin\left(\alpha - \theta\right) \tag{1.19}$$

Che si annulla quando  $\alpha = \theta$ , che prende il nome di punto morto esterno, oppure quando  $\alpha - \theta = \pi$ , che prende il nome di punto morto interno. Nel caso di

manovellismo centrato, le due configurazioni critiche si hanno quando  $\alpha = \theta = 0$  (PMS) e  $\alpha - \theta = \pi - 0 = \pi$  (PMI). Queste due configurazioni critiche sono presentate in basso in Figura 1.6.



Figura 1.6: Configurazioni critiche manovellismo centrato

I punti morti non sono un problema per i MCI in quanto entrano in gioco le inerzie che impediscono al sistema di bloccarsi o di iniziare a ruotare nel verso sbagliato.

#### 1.3 Dinamica del manovellismo di spinta

Ora ci dedichiamo all'analisi dinamica. Il fine dell'analisi dinamica è quello di trovare le reazioni che esplicano i vincoli, che saranno proprio le forze che andranno a caricare i componenti assieme alle forze esterne e alle forze d'inerzia. In generale, nei problemi di dinamica si vogliono studiare le cause che generano il moto, a differenza della cinematica che invece ne studia solo l'effetto. L'oggetto della nostra analisi è la biella su cui agiscono sia le reazioni vincolari sull'occhio grande che sull'occhio piccolo e le forze d'inerzia. Innanzitutto, cerchiamo di capire cosa sono le forze d'inerzia: questo concetto è stato introdotto da D'Alembert che permise di trasformare un problema di dinamica in un problema di statica. Partendo dall'equazione di Newton, ovvero la seconda legge della dinamica, sappiamo che la sommatoria delle forze agenti su un corpo è pari alla massa per accelerazione:

$$\sum_{j=1}^{n} \vec{F_j} = m\bar{a}$$

Portiamo tutto a destra:

$$\sum_{j=1}^{n} \vec{F_j} - m\vec{a} = 0$$

D'Alembert introduce un termine fittizio:

$$\vec{F_i} = -m\vec{a} = forze \ di \ inerzia$$

In questo modo la seconda legge della dinamica si presenta come una condizione di equilibrio, dove le forze generalizzate esterne devono essere in equilibrio con le forze d'inerzia; per questo motivo si parla di equilibrio dinamico. In questo modo si potrebbe utilizzare anche il principio dei lavori virtuali per risolvere problemi di dinamica. Le forze d'inerzia altro non sono che delle forze di volume, ovvero forze che agiscono su ogni elementino avente massa: come vedremo queste hanno delle criticità in ambito FEM.

Tornando al nostro caso indichiamo con  $m_P e m_B$  la massa del pistone e della biella. Come verso per le reazioni vincolari sulla biella decidiamo di orientarle in modo concorde col sistema di riferimento usato. Scriviamo l'equilibrio dinamico lungo X e Y per il pistone facendo riferimento al diagramma di corpo libero in Figura 1.7 ottenuto eliminando i vincoli e sostituendoli con le reazioni da loro esplicate:

$$\begin{cases} -F_P - R_{P,x} = m_P \ddot{x_P} \\ R_C - R_{P,y} = 0 \end{cases}$$
(1.20)

Il pistone non ha alcuna accelerazione in verso ortogonale al cilindro. Sempre facendo riferimento al diagramma di corpo libero scriviamo ora l'equilibrio dinamico per la biella considerando anche l'equilibrio lungo l'asse Z a rotazione:

$$\begin{cases} R_{P,x} + R_{B,x} = m_B \ddot{x_B} \\ R_{P,y} + R_{B,y} = m_B \ddot{y_B} \\ R_{B,x} d\sin\theta - R_{P,x} (l-d) \sin\theta - R_{B,y} d\cos\theta + R_{P,y} (l-d) \cos\theta = I_B \ddot{\theta} \end{cases}$$
(1.21)



Figura 1.7: Diagramma di corpo libero manovellismo di spinta

Dove  $F_P$  sono le forze di pressione esercitate dal gas durante la fase di combustione sul cielo del pistone e si possono scrivere come  $F_P = p \frac{\pi d_c^2}{4}$  con  $d_c$  l'alesaggio del cilindro.  $R_P$  è la reazione del piede di biella ed  $R_B$  è la reazione del bottone di manovella.  $R_C$  è la reazione che può esercitare il cilindro sul pistone, immaginiamo tutte le reazioni agenti sul pistone applicate nel suo baricentro. Invece  $\ddot{\theta}$  non è altro che l'accelerazione angolare della biella, ovvero rispetto alla nostra notazione:  $\alpha_2$ . Ora risolviamo il sistema:

$$\begin{cases}
R_{P,x} = -m_P \ddot{x_P} - F_P \\
R_C = R_{P,y} \\
R_{B,x} = m_B \ddot{x_B} - R_{P,x} \\
R_{B,y} = m_B \ddot{y_B} - R_{P,y} \\
R_{B,x} d \sin \theta - R_{P,x} (l-d) \sin \theta - (m_B \ddot{y_B} - R_{P,y}) d \cos \theta + \\
+ R_{P,y} (l-d) \cos \theta = I_B \ddot{\theta}
\end{cases}$$
(1.22)

Dall'ultima equazione, ottenuta sostituendo  $R_{B,y}$ , possiamo ricavare  $R_{P,y}$ . Quindi dalla prima equazione otteniamo subito, tale risultato verrà usato dal programma per calcolare  $R_{B,x}$  che poi verrà sostituito nell'ultima equazione per ricavare  $R_{P,y}$  ed infine otteniamo  $R_{B,y}$ ; in questo modo ricaviamo tutte le reazioni vincolari.

$$\begin{cases}
R_{P,x} = -m_P \ddot{x_P} - F_P \\
R_{B,x} = m_B \ddot{x_B} - R_{P,x} \\
R_{P,y} = \frac{I_B \ddot{\theta} + m_B \dot{y_B} d \cos \theta - R_{B,x} d \sin \theta + R_{P,x} (l-d) \sin \theta}{l \cos \theta} \\
R_{B,y} = m_B \ddot{y_B} - R_{P,y} \\
R_C = R_{P,y}
\end{cases}$$
(1.23)

Una delle principali semplificazioni adottate in questa trattazione consiste nel considerare la massa della biella concentrata nel proprio baricentro, anziché trattarla come una massa distribuita lungo la sua lunghezza. Tale ipotesi introduce inevitabilmente alcune imprecisioni nel calcolo delle reazioni vincolari, in particolare sovrastimandole nella fase di scoppio, in corrispondenza del PMS.

Il codice implementato è in grado di calcolare correttamente le forze d'inerzia che la biella scambia con il pistone. Tuttavia, non tiene conto del fatto che una parte della massa della biella stessa, essendo distribuita, concorre anch'essa a generare una forza di scarico durante lo scoppio, contribuendo a ridurre ulteriormente le reazioni vincolari sull'occhio piccolo.

Per mitigare questa approssimazione, una possibile soluzione consiste nel ripartire la massa della biella in due porzioni: una metà assegnata al piede di biella e l'altra al bottone di manovella. Un'alternativa più accurata prevede invece di suddividere la massa tra l'occhio grande e l'occhio piccolo, in modo da mantenere inalterata la posizione del baricentro. Questo aspetto, di particolare rilevanza dal punto di vista dinamico, sarà ulteriormente approfondito nell'analisi dell'instabilità strutturale.

# 2 Analisi cinematica e dinamica del sistema reale

#### 2.1 Workflow dell'analisi strutturale *Piaggio*

Come punto di partenza per lo studio ci sono stati forniti due modelli FEM che vengono utilizzati in *Piaggio* per una prima validazione di pistone e biella.

Fondata nel 1884 a Sestri Ponente (Genova) da Rinaldo Piaggio, l'azienda  $Piaggio^{(\mathbb{R})}$  è oggi uno dei principali protagonisti mondiali nel settore della mobilità, con una consolidata presenza nei mercati europei, asiatici e americani. Originariamente attiva nel settore ferroviario e aeronautico, *Piaggio* ha saputo adattarsi nel tempo ai cambiamenti del contesto storico-industriale, diventando un'icona nel campo dei veicoli a due ruote.

Oggi, il Gruppo *Piaggio*, controllata dalla holding *Immsi S.p.A* quotata in borsa, include marchi storici come *Aprilia*, *Moto Guzzi*, *Derbi*, *Gilera* e *Vespa*. Le sue attività spaziano dalla progettazione e produzione di scooter, motocicli e ciclomotori, fino ai veicoli commerciali leggeri a tre e quattro ruote, impiegati in vari settori professionali. Oggi la *Piaggio* sempre più si sta concentrando sulla mobilità sostenibile.

In questo capitolo spiegheremo qual è il workflow usato in *Piaggio* e vedremo inoltre quali sono stati i dati di input forniti dall'azienda. Tra le ipotesi semplificative che vengono fatte in entrambi gli studi abbiamo:

- Si trascura il campo termico facendo l'ipotesi che su due motori della stessa famiglia l'effetto termico sia lo stesso;
- Si trascurano tutti gli effetti dinamici come vibrazioni e risonanza, ipotizzando un comportamento di tipo quasi statico.

Il primo passo in entrambi i modelli risiede nell'utilizzo di software *multibody*. I software *multibody* rientrano nell'ingegneria assistita al calcolatore (CAE). Lo scopo di questa disciplina è quello di ridurre tempi e costi di progettazione e di riuscire a portare sul mercato prodotti aventi maggiori standard qualitativi. I software CAE riescono ad assistere gli operatori in qualsiasi attività di progettazione: dalla creazione della geometria attraverso software CAD, alla simulazione strutturale del manufatto con i software FEM fino ad arrivare all'ingegnerizzazione del processo di produzione attraverso i software CAM. In particolar modo i software *multibody* permettono di riprodurre il comportamento cinematico e dinamico dei meccanismi che si traduce nell'analisi delle grandezze cinematiche associate ai corpi. Attraverso questi strumenti si possono valutare fenomeni di interferenza, di contatto, scoprire l'entità delle reazioni vincolari, ecc... Un grande vincolo di questi software è l'elasticità dei corpi che in genere vengono considerati come corpi rigidi; questo comporta delle criticità nella valutazione delle strutture iperstatiche. Generalmente l'analisi *multibody* precede l'analisi FEM, specialmente per meccanismi molto complessi in cui la sola analisi FEM comporterebbe un enorme onere computazionale. Generalmente, se si vogliono studiare i grandi spostamenti di un meccanismo si utilizza un software *multibody*. Tornando al nostro caso, nei due modelli viene fatta un'analisi *multibody* simulando il comportamento dello scooter al banco prova, ovvero si leva la ruota posteriore e si unisce per mezzo di elementi elastici l'asse ruota con un disco che viene frenato a coppia costante per evitare il fuorigiri del motore. Nella simulazione sono state fatte delle piccole semplificazioni inerenti alla rigidità di alcuni corpi e alla modellazione della cinghia di trasmissione che è stata introdotta unicamente come vincolo cinematico, ovvero tutta la dinamica interna della cinghia asincrona dentata viene trascurata. Per eseguire la simulazione, è stato applicato un vincolo cinematico di velocità angolare al manovellismo. In particolare, si ha una prima fase transitoria costituita da un'iniziale fase di applicazione della condizione in moto graduale, per facilitare il calcolo al simulatore *multibody*, seguita da una fase di stabilizzazione del sistema. Una volta raggiunta la stabilizzazione del sistema, si stacca l'attuatore sul manovellismo di spinta e si inserisce il profilo di pressioni in camera di combustione ottenuto o attraverso campagne sperimentali o per via numerica. In Figura 2.1 è riportato il grafico in esame che rappresenta il profilo della velocità angolare dell'albero motore. Questo sarà proprio il profilo che riotterremo in fase di verifica cinematica nel caso del primo modello. Si può notare quindi che, come anticipato, da modello *multibody* non si ottiene un profilo di velocità angolare della manovella costante, ma bensì essa è soggetta ad un'accelerazione angolare che sarà particolarmente



complessa da ricavare non essendo uno dei dati in input.

Figura 2.1: Profilo velocità angolare di manovella al *multibody* 

Una volta completato il calcolo delle grandezze cinematiche e delle reazioni vincolari tramite l'analisi *multibody*, si procede con la valutazione strutturale mediante simulazione FEM, utilizzando il software  $Ansys^{\textcircled{(B)}}$ . Per l'analisi del pistone sono stati definiti due sottoassiemi distinti: il primo comprende esclusivamente la biella, mentre il secondo contiene il pistone, lo spinotto e il simulacro del cilindro, modellato solo come elemento di superficie. Tali sottoassiemi vengono successivamente accoppiati in un unico modello assemblato, in modo da poter variare l'inclinazione relativa della biella rispetto all'asse del pistone in funzione delle diverse condizioni di carico. L'angolo di inclinazione della biella, infatti, è un parametro variabile che viene definito all'interno delle proprietà dell'assieme e aggiornato dinamicamente sulla base dei risultati dell'analisi *multibody*, tale valore che abbiamo chiamato  $\theta$ sarà oggetto di confronto con i risultati calcolati da noi. La biella viene fatta ruotare attraverso l'utilizzo di un *remote displacement* imponendo le coordinate del bottone di manovella tali per cui la biella forma un angolo  $\theta$  con l'asse del cilindro.

Per la simulazione strutturale sono state selezionate cinque condizioni di carico ritenute significative: la massima e la minima accelerazione del pistone, la pressione massima esercitata dai gas, e i valori estremi della reazione vincolare agente sul pistone da parte del cilindro. La scelta di queste configurazioni non è stata motivata unicamente da esigenze legate alla verifica a fatica: lo spostamento radiale del cilindro influisce infatti anche sulla deviazione della geometria della sezione trasversale del pistone, aspetto di rilievo nella valutazione della deformazione complessiva, pur avendo impatto trascurabile sulla vita a fatica del componente. Poiché tutte le simulazioni strutturali sono di tipo statico, per tener conto degli effetti dinamici, in particolare l'accelerazione del pistone e la velocità angolare della biella, è stato necessario introdurre un campo di forze di massa fittizie. Tali forze permettono di simulare, in condizioni statiche, l'effetto dell'inerzia sul sistema. In particolare, l'accelerazione del pistone, le accelerazioni del bottone di manovella e le grandezze angolari (velocità e accelerazione) della biella vengono utilizzate per definire le forze di massa sia nella biella che nel pistone. Tutti questi valori saranno oggetto di confronto con quelli ottenuti tramite i modelli cinematici sviluppati. L'equilibrio dinamico globale viene infine raggiunto considerando l'insieme delle forze d'inerzia, la spinta dei gas in camera di combustione e i vincoli strutturali imposti dal sistema, così come spiegato nel Capitolo 1.3.

In un secondo momento sono stati forniti i profili di pressione in camera di combustione per i tre regimi di rotazione. Le reazioni dei cuscinetti per tutti i 720° di funzionamento del motore non sono stati forniti; per questo una vera e propria verifica dinamica non è stata fatta per questo modello, ma solo per quello di validazione della biella. Tra i valori che mancano troviamo velocità angolare di manovella e accelerazione angolare di manovella; nel prossimo capitolo vedremo la metodologia sviluppata per trovare queste quantità.

Per quanto riguarda il modello di validazione della biella, in base ai vincoli di tempo e al livello di accuratezza richiesto, possono essere adottate diverse metodologie. In questa sede ne verranno illustrate due. L'approccio più completo consiste nel campionare le condizioni di carico ogni 2–3 gradi di rotazione dell'albero motore, ottenendo così circa 240-360 configurazioni di carico per ciascun ciclo motore. Tale strategia, pur comportando un notevole onere computazionale, consente una caratterizzazione estremamente dettagliata del comportamento ciclico del componente ed è stata adottata anche in altri studi presenti in letteratura, come in [1, 10].

Queste simulazioni vengono fatte per dei regimi di rotazione significativi (ad esempio massima velocità di rotazione, massima pressione ecc...). In queste simulazioni vengono applicate anche le accelerazioni inerziali e le velocità angolari, in modo da garantire l'equilibrio dinamico del sistema. Eventuali piccoli squilibri numerici vengono corretti sospendendo virtualmente la biella con molle deboli (*weak springs*) che permettono di stabilizzare la soluzione senza inserire ulteriori carichi nell'analisi.

Una seconda variante prevede di adottare lo stesso approccio, ma limitando l'analisi alle sole condizioni di carico in cui almeno una componente del vettore dei carichi raggiunge un valore estremo (massimo o minimo). Questo consente di ridurre sensibilmente il numero di simulazioni FEM necessarie, accelerando il processo senza compromettere l'accuratezza nei punti più critici. Nel caso specifico, si considerano 2 reazioni vincolari sull'occhio grande e 2 sull'occhio piccolo lungo x e y, per un totale massimo di otto condizioni estremali di carico. Ripetendo tale analisi per ciascuno dei tre regimi di rotazione da valutare, si arriva a un massimo teorico di 24 analisi FEM. Tuttavia, in pratica, è frequente che gli istanti in cui si verificano i valori estremi coincidano tra più componenti, riducendo ulteriormente il numero effettivo di simulazioni da svolgere. Per la biella presa in esame si sono fatte 19 analisi: 6 a 6500RPM, 6 a 8000RPM e 7 a 10600RPM.

Oltre l'analisi di verifica per i carichi agenti, devono essere eseguite ulteriori verifiche specifiche, tra cui: la verifica al *frettinq* e quella di instabilità della biella, in particolare in prossimità del PMS, dove si verifica la massima pressione in camera di combustione. Il *fretting* è un fenomeno di danneggiamento superficiale che si manifesta in corrispondenza di contatti soggetti a micro-scartamenti ciclici sotto carico, come ad esempio tra la biella e lo spinotto del pistone. Tale danneggiamento è causato da piccoli movimenti relativi tra superfici a contatto, che portano alla formazione di ossidi, usura localizzata e, a lungo termine, potenziale innesco di cricche da fatica. Il modello complessivo fornito è visibile in Figura 2.2. Esso rappresenta il punto di partenza per le analisi successive condotte sulla biella. In particolare, dal blocco dedicato all'analisi a *fretting* sono stati caricati tutti i dati cinematici e dinamici utilizzati, ad eccezione dei profili di pressione, che sono stati forniti separatamente sotto forma di file esterno. L'unico aspetto che non verrà ulteriormente approfondito è proprio l'analisi a *fretting*, in quanto essa richiede coefficienti di verifica specifici di proprietà aziendale oppure, in alternativa, valori reperibili in letteratura che tuttavia difficilmente risultano affidabili per il proprio caso. I modelli di analisi verranno approfonditi nel Capitolo 3.



Figura 2.2: Modello WB fornito per validazione biella

L'ultima fase del *workflow Piaggio*, comune a entrambi i modelli considerati, prevede l'impiego di un software esterno ad *Ansys* per la valutazione in postprocessing della vita a fatica. Tale procedura si basa sui dati di tensione ottenuti in corrispondenza di ciascun nodo della mesh del pistone, derivanti dalle cinque analisi condotte nei tre diversi regimi di rotazione.

In particolare, per ogni nodo vengono registrati i valori massimi e minimi di tensione (comprensivi di segno) osservati durante le simulazioni. Per caratterizzare un ciclo di fatica, è necessario disporre del valore della tensione alternata; tuttavia, nel presente lavoro, si adotta una semplificazione assumendo che tale valore possa essere approssimato mediante la tensione media, considerando che la biella è soggetta a un ciclo di carico di tipo dallo zero.

Pertanto, la tensione massima equivalente secondo Von Mises, rilevata nel punto più sollecitato della biella in configurazione critica, può essere considerata pari al doppio della tensione alternata in quel punto.

È importante sottolineare che, per un'analisi di fatica accurata, sarà necessario integrare ulteriori considerazioni, tra cui la definizione della vita utile di progetto del pistone e la stima della distribuzione temporale del funzionamento del motore nei tre regimi di rotazione. Si anticipa fin d'ora che il regime a 6500 RPM, corrispondente al punto di coppia massima e dunque alla massima pressione in camera di combustione, risulta essere il più gravoso in termini di impatto sulla vita utile sia del pistone che della biella.

### 2.2 Verifica cinematica per la validazione del pistone

La metodologia con la quale sono stati verificati i risultati ottenuti con gli algoritmi MATLAB implementati differisce in base al modello che si considera, ovvero se modello per verifica del pistone o della biella, in quanto i dati in input forniti sono diversi. In una prima fase per la verifica dei risultati sul primo modello, quello di verifica del pistone, si è deciso di utilizzare il teorema di A-K e il metodo dei diagrammi polari. Dati che in seguito sono stati confrontati anche con i dati sperimentali che ci sono stati forniti solo in una seconda fase. In entrambi i casi (T. A-K e diagrammi polari) la misura della lunghezza dei segmenti per fare la verifica è stata effettuata su *GeoGebra*<sup>™</sup> disegnando le apposite costruzioni geometriche di cui i metodi necessitano. Ora ci occuperemo di capire in cosa consiste la verifica attraverso T. di Aronhold-Kennedy [6]. Innanzitutto bisogna ricordare che nel moto assoluto o relativo di un corpo esiste un unico punto del piano la cui velocità è nulla e questo prende il nome di centro di istantanea rotazione (CIR), questo punto tuttavia non è detto che abbia accelerazione nulla. Ammettiamo che ci siano tre piani  $(\pi_1, \pi_2, \pi_3)$  in moto relativo tra loro e definiamo come  $P_{12}$  il CIR del moto di  $\pi_1$  rispetto a  $\pi_2$ ,  $P_{13}$  il CIR del moto di  $\pi_1$  rispetto a  $\pi_3$  e infine  $P_{23}$  il CIR del moto di  $\pi_2$  rispetto a  $\pi_3$ ; il T di A-K afferma che i 3 CIR saranno sempre allineati. Ovvero il T di A-K afferma che i CIR di 3 corpi in moto relativo tra loro saranno sempre allineati. Proprietà fondamentale dei CIR è che  $P_{ij} = P_{ji}$  e il numero di CIR in un meccanismo avente 'l' numero di membri si può scrivere come:

 $N_{CIR} = \frac{l(l-1)}{2}$ . A questo punto dobbiamo definire una procedura per stabilire la posizione dei CIR:

- 1. Si enumerano i membri del meccanismo e da subito si trovano i CIR di membri collegati attraverso coppie rotoidali, in particolare il centro delle coppie rotoidali sono i CIR. Inoltre possiamo trovare i CIR tra telaio e coppie prismatiche sapendo che si trovano all'infinito lungo una direzione ortogonale all'asse del pattino;
- 2. Ora bisogna disegnare il grafo del meccanismo avente numero di vertici pari al numero dei membri del meccanismo;
- 3. A questo punto si etichettano i lati corrispondenti ai CIR di cui si conoscono le posizioni: ad esempio se conosco  $P_{12}$  unirò i vertici 1 e 2;
- 4. I vertici non collegati costituiranno dei CIR la cui posizione la si potrà ottenere intersecando le rette ottenute congiungendo appositi CIR. Questo punto lo si vedrà meglio nell'applicazione del T di A-K nel caso in esame.

Procediamo con l'applicazione del T. A-K nel caso in esame prendendo come riferimento la Figura 2.3. Enumeriamo i membri del meccanismo nella seguente maniera: 1 telaio che corrisponde anche col cilindro, 2 manovella, 3 biella e 4 pattino. Ora possiamo subito riconoscere i CIR  $P_{12}$ ,  $P_{23}$ ,  $P_{34} \in P_{14}$ . Applicando la formula vista in precedenza possiamo stabilire che  $N_{CIR} = \frac{4(4-1)}{2} = 6$  ciò significa che deve essere stabilita la posizione di altri 2 CIR. Se vogliamo trovare la posizione di  $P_{13}$  bisogna tracciare il lato corrispondente sul grafo e la sua posizione verrà ottenuta osservando i due percorsi chiusi che si creeranno: in particolare il percorso  $P_{13}$ ,  $P_{12}$ ,  $P_{23}$  e il percorso  $P_{13}$ ,  $P_{14}$ ,  $P_{34}$ . Quindi  $P_{13}$  sarà dato dall'intersezione di due rette: una passante per  $P_{12}$ ,  $P_{23}$  e l'altra una retta verticale passante per  $P_{34}$ . Stessa procedura per ottenere  $P_{24}$ . La costruzione la si può osservare in Figura 2.3.

Ora possiamo utilizzare la proprietà dei CIR relativi per cui se nel moto relativo il CIR è fermo vuol dire che nel moto assoluto possiamo scrivere che la velocità del CIR, visto come punto appartenente ad un corpo, è uguale alla velocità assoluta del CIR visto come punto appartenente all'altro corpo, ovvero possiamo scrivere che  $\overrightarrow{v_{P_{24}}}$  vista dal punto di vista del corpo due è uguale che se vista dal corpo quattro:  $(\overrightarrow{v_{P_{24}}})_2 = (\overrightarrow{v_{P_{24}}})_4$ . Ora possiamo scrivere che:

$$\begin{cases} (\overrightarrow{v_{P_{24}}})_2 = \overrightarrow{\omega_1} \times \overrightarrow{P_{12}P_{24}} \\ (\overrightarrow{v_{P_{24}}})_4 = \overrightarrow{v_{pattino}} \end{cases}$$
(2.1)



Figura 2.3: Grafo meccanismo e costruzione per applicazione T.A-K

Quindi misurando la lunghezza del segmento  $\overline{P_{12}P_{24}}$ , otteniamo la velocità del pattino. Mentre invece utilizzando che:

$$\begin{cases} (\overrightarrow{v_{P_{23}}})_2 = \overrightarrow{\omega_1} \times \overrightarrow{P_{12}P_{23}} \\ (\overrightarrow{v_{P_{23}}})_3 = \overrightarrow{\omega_2} \times \overrightarrow{P_{13}P_{23}} \end{cases}$$
(2.2)

E utilizzando  $(\overrightarrow{v_{P_{23}}})_2 = (\overrightarrow{v_{P_{23}}})_3$  si ottiene il rapporto tra le velocità angolari:

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{\overline{P_{12} P_{23}}}{\overline{P_{13} P_{23}}} \tag{2.3}$$

Il cui verso si ottiene utilizzando la regola della mano destra. Per semplicità possiamo scrivere che  $\overline{P_{12}P_{23}}$  è pari al raggio di manovella che è circa 0,003 metri e la velocità angolare di manovella fornita in RPM, la si può facilmente convertire in  $\frac{rad}{s}$  usando l'apposita conversione:

$$\omega_1 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] = \omega_1 \left[ \text{RPM} \right] \cdot \frac{2\pi}{60} \tag{2.4}$$

Ora possiamo utilizzare il T. A-K per validare il codice di calcolo delle velocità e posizioni 2.4.1 che abbiamo scritto. Scegliamo un angolo  $\alpha = 212.625^{\circ}$  che vedremo essere proprio l'angolo  $\alpha$  del manovellismo corrispondente alla configurazione avente massima accelerazione del pistone a 6500 RPM. Ricordiamo che il manovellismo ruota sempre in verso antiorario e quindi secondo la nostra convenzione



Figura 2.4: Applicazione T.A-K configurazione  $\alpha = 212.625^{\circ}$ 

 $\omega_1$  ha segno sempre negativo. La costruzione è presentata in Figura 2.4 mentre la Tabella 2.1 fornisce il confronto dei risultati con i due metodi di calcolo. I risultati dell'algoritmo si possono consultare in Figura 2.5.

Ora nella Figura 2.5 e nella Tabella 2.2 riportiamo i risultati anche per la configurazione avente  $\alpha = 358.759^{\circ}$ , corrispondente alla configurazione in cui il pistone è sottoposto alla minima accelerazione.



Figura 2.5: Applicazione T.A-K configurazione  $\alpha = 358.759^{\circ}$ 

Grandezza	Algoritmo	T.A-K
$\theta$ [rad]	9.3125	9.3128
s [m]	0.07193	0.07193
$\omega_2 [\mathrm{rad/s}]$	-174.367	-174.33
v  [m/s]	-8.0292	-8.032

Tabella 2.1: Confronto risultati per  $\alpha = 212.625^{\circ}, 6500RPM$ 

Grandezza	Algoritmo	T.A-K
$\theta$ [rad]	0.3729	0.37189
s [m]	0.127405	0.12753
$\omega_2  [rad/s]$	204.26039	203.9815
v  [m/s]	-0.564425	-0.56496

Tabella 2.2: Confronto risultati per  $\alpha = 358.759^{\circ}$ , 6500 RPM

Dalle Tabelle 2.1 e 2.2 possiamo osservare che i risultati forniti dall'algoritmo coincidono con quelli forniti dal T. A-K quindi possiamo affermare che la verifica ha dato esito positivo.

Ora possiamo passare all'utilizzo dei diagrammi polari [7] che ci permetterà di verificare non solo le posizioni e le velocità, ma anche le accelerazioni, che ci permetteranno di verificare la dinamica. Si è fatta la verifica per tutte e 5 le configurazioni di cui si disponevano i risultati a 6500 RPM. Il metodo dei diagrammi polari si fonda sulle proprietà dei vettori. In particolare, attraverso le equazioni della cinematica, è possibile esprimere velocità incognite, delle quali si può conoscere o meno la direzione, come somme vettoriali di altre grandezze di cui sono noti il modulo, la direzione, oppure entrambi. Similmente per le accelerazioni. Il primo passo è generalmente quello di fissare un fattore di scala per rappresentare i vettori noti, scala che poi deve essere mantenuta anche per tutti gli altri vettori. Poi si dovranno mettere al primo membro i vettori noti e al secondo membro i vettori con quantità incognite. I vettori che rappresentano grandezze cinematiche assolute devono partire dall'origine. Misurando la lunghezza dei vettori ricavati e tenendo conto dei fattori di scala si possono ottenere tutte le quantità cinematiche di interesse. Sia 'A' la cerniera fissa, 'B' il bottone di manovella, 'G' il baricentro della biella e 'C' il perno di biella. Ora possiamo scrivere che:

$$\begin{cases} \vec{v_B} = \vec{\omega_1} \times \overrightarrow{AB} \\ \vec{v_C} = \vec{v_B} + \vec{v_{CB}} \\ \vec{v_{CB}} = \vec{\omega_2} \times \overrightarrow{BC} \\ \vec{v_G} = \vec{v_B} + \vec{v_{GB}} \\ \vec{v_{GB}} = \vec{\omega_2} \times \overrightarrow{BG} \end{cases}$$
(2.5)

Possiamo raggruppare in una Tabella (Tab 2.3) tutto ciò che sappiamo o non sappiamo per ogni vettore:

	Direzione	Modulo
$\vec{v_B}$	$\perp AB$	$\omega_1 AB$
$\vec{v_C}$	$\parallel AC$	?
$\vec{v_{CB}}$	$\perp BC$	$\omega_2 BC$
$\vec{v_G}$	?	?
$\vec{v_{GB}}$	$\perp BG$	$\omega_2 BG$

Tabella 2.3: Direzione e modulo delle velocità

Dove il verso di  $\omega_2$  viene attribuito con la regola della mano destra, mentre il modulo lo si ottiene sapendo che  $\omega_2 = \frac{v_{CB}}{BC}BG$ .

Possiamo usare gli stessi principi per fare l'analisi delle accelerazioni, tuttavia bisogna distinguere in accelerazioni normali e tangenziali. Consideriamo che l'accelerazione di punti appartenenti allo stesso corpo rigido si può scrivere come:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \overrightarrow{AB} + \omega^2 \overrightarrow{BA}$$
(2.6)

- $\vec{a}_B$ : Accelerazione assoluta del punto B
- $\vec{a}_A$ : Accelerazione di trascinamento (Accelerazione del punto A)
- $\vec{a}_{BA}^t = \vec{\alpha} \times \overrightarrow{AB}$ : Componente tangenziale dell'accelerazione relativa
- $\vec{a}_{BA}^n = \omega^2 \overrightarrow{BA}$ : Componente normale dell'accelerazione relativa
Applicandola nel caso in esame otteniamo:

$$\begin{cases} \vec{a_B} = \vec{a_C} + \vec{a_{BCn}} + \vec{a_{BCt}} \\ \vec{a_G} = \vec{a_B} + \vec{a_{GBn}} + \vec{a_{GBt}} \end{cases}$$
(2.7)

	Direzione	Modulo
$\vec{a_B}$	$\parallel AB$ verso A	$\omega_1^2 AB$
$\vec{a_C}$	$\parallel AC$	?
$\vec{a_{BCn}}$	$\parallel BC$	$\omega_2^2 BC$
$\vec{a_{BCt}}$	$\perp BC$	$\alpha_2 CB$
$\vec{a_{GBn}}$	$\parallel GB$	$\omega_2^2 BG$
$\vec{a_{GBt}}$	$\perp GB$	$\alpha_2 BG$

Tabella 2.4: Direzione e modulo delle accelerazioni

A partire dalle coordinate del bottone di manovella si è potuto calcolare l'angolo  $\theta$  per cui si voleva verificare la configurazione utilizzando la funzione arcotangente, a questo punto però dal grafico in Figura 2.6 possiamo osservare che per uno stesso angolo  $\theta$  corrispondono almeno due angoli  $\alpha$ , per decidere quale angolo  $\alpha$  selezionare si è deciso di usare i segni delle componenti del vettore accelerazione sul bottone di manovella. In una prima fase questa operazione è stata fatta a mano per la verifica delle sei configurazioni, ma in un secondo momento, quando ci sono stati forniti i dati per tutto lo spettro di funzionamento del motore, si è deciso di scrivere un codice *MATLAB* che lo facesse per conto nostro e inoltre che riuscisse a fornirci anche i valori di accelerazione angolare di manovella.



Figura 2.6:  $\theta$  vs  $\alpha$  da analisi cinematica

In questo caso non stiamo considerando l'accelerazione angolare della manovella. Come fattore di scala si è deciso di adottare  $10^{-3}$  per quanto riguarda le velocità e  $10^{-6}$  per le accelerazioni, quindi ad esempio per ottenere la velocità effettiva del pistone  $v_C$  si deve moltiplicare per 1000 il valore letto sulla costruzione. Verifichiamo la configurazione 5\_6\_maxa ovvero la configurazione corrispondente alla massima accelerazione sul pistone a 6500 giri. Per tale configurazione otteniamo che  $\alpha = 212.625^{\circ}$ . I risultati ottenuti usando l'algoritmo 2.4.1 sono presentati in Figura 2.5, mentre le costruzioni geometriche nelle Figure 2.7, 2.8 e 2.9.

Grandezza	Valore
θ	9.31°
S	$0.071935\mathrm{m}$
v	$-8.03\mathrm{m/s}$
ω	$-174.37\mathrm{rad/s}$
a	$9663.60\mathrm{m/s^2}$
α	$-70990.42  rad/s^2$
$a_{Gx}$	$11007.25{\rm m/s^2}$
$a_{Gy}$	$5440.81{\rm m/s^2}$

Tabella 2.5: VerificaMATLAB configurazione  $\tt 5\_6\_maxa$ 



Figura 2.7: Verifica posizioni diagrammi polari $\tt 5\_6\_maxa$ 



Figura 2.8: Verifica velocità diagrammi polari $\tt 5\_6\_maxa$ 



Figura 2.9: Verifica accelerazioni diagrammi polari 5\_6\_maxa

Grandezza	Algoritmo	Diagrammi polari	Diff. relativa $[\%]$
$\theta$ [rad]	9.31250	9.31480	0.02470
s [m]	0.07193	0.07191	0.02781
$\omega_2 \; [rad/s]$	-174.36700	-174.36300	0.00229
v  [m/s]	-8.02920	-8.02930	0.00125
$\alpha_2 \ [rad/s^2]$	-70990.41867	-71001.04180	0.01499
$a_{Gx} \ [m/s^2]$	11007.24910	11006.79370	0.00413
$a \ [m/s^2]$	9663.60008	9663.85750	0.00266
$a_{Gy} \ [m/s^2]$	5440.80948	5441.62520	0.01501

Quindi possiamo ottenere i seguenti risultati riassunti in Tabella 2.6.

Tabella 2.6: Confronto risultati per 5\_6\_maxa

Dove i valori di differenza relativa sono stati calcolati mettendo al denomina-

tore i valori ricavati con *MATLAB*. In questa fase gli errori che sono stati fatti sono: errore nel ricavare l'esatto angolo  $\alpha$  corrispondente al  $\theta$  desiderato perché l'algoritmo genera un vettore  $\alpha$  discreto con un certo passo di 0.0005 radianti, inoltre un altro errore è nel ruotare l'angolo di manovella  $\alpha$  in *GeoGebra* in modo tale che coincida esattamente con quello trovato, anche in questo caso si ha una rotazione a scatti e non continua. Si può osservare come le differenze relative percentuali siano molto piccole, per questo motivo possiamo concludere che la verifica ha dato esito positivo. Ora bisogna verificare che i risultati ricavati con l'algoritmo siano simili a quelli forniti *Piaggio*. Per confrontare i risultati si deve considerare l'accelerazione angolare di manovella che è stata ricavata attraverso il codice 2.4.1, l'accelerazione angolare di manovella comporta una variazione della velocità angolare di manovella che tuttavia deve essere mediamente pari al valore di RPM per cui si sta studiando il funzionamento. I risultati ottenuti col codice si possono osservare in Figura 2.10.



Figura 2.10:  $\omega_1 \in \alpha_1$  ricavati per modello validazione pistone a 6500RPM

Si può osservare come l'andamento di  $\omega_1$  sia coerente con quanto atteso dall'analisi *multibody* mostrata in Figura 2.1. La differenza principale tra i due grafici consiste nel fatto che essi risultano specchiati: ciò è dovuto al fatto che uno è tracciato in funzione del tempo, mentre l'altro rispetto all'angolo  $\alpha$ . Poiché  $\omega_1$  assume valori negativi, a istanti temporali crescenti corrispondono posizioni angolari decrescenti.

L'andamento della velocità angolare oscilla attorno ai 6500 RPM, variando indicativamente tra i -6300 e i -6620 RPM. Al termine di ogni ciclo, l'andamento si ripete, con il punto finale che coincide con l'inizio del ciclo successivo.

Il medesimo codice consente inoltre di effettuare un confronto diretto tra i risultati ottenuti. In particolare, nella Figura 2.11 è riportato il confronto tra i dati cinematici forniti e quelli calcolati tramite algoritmo, considerando l'accelerazione angolare della manovella.



Figura 2.11: Confronto tra dati forniti e calcolati per modello di verifica del pistone

Osservando i grafici si può concludere che la verifica della cinematica è soddisfatta per tutto lo spettro di funzionamento del motore. Per quanto riguarda la dinamica si graficano gli andamenti delle reazioni dei vincoli (Figura 2.12), che tuttavia non possono essere confrontati con alcun valore di riferimento in quanto non fornitici.



Figura 2.12: Reazioni vincolari ottenute su modello per validazione del pistone

Per una descrizione degli algoritmi di calcolo utilizzati e una loro breve analisi si rimanda al Capitolo 2.4.1.

# 2.3 Verifica cinematica e dinamica per la validazione della biella

In questo paragrafo si procederà ad adattare l'algoritmo, già validato per il modello di verifica strutturale del pistone, al modello di verifica della biella, oggetto del nostro studio. Sarà necessario modificare il codice per tenere conto delle variazioni di alcuni dati forniti. In particolare sono stati forniti i valori di  $a_{Gx}$ ,  $a_{Gy}$ ,  $\alpha_2$ ,  $\omega_2$ ,  $R_{Bx}$ ,  $R_{By}$ ,  $R_{Px}$  e  $R_{Py}$  in fase tra loro campionati ogni due gradi circa in uno spettro maggiore dei 720° di cui necessitavamo e con i punti iniziali che non coincidevano né col PMS né col PMI. Inoltre ci è stato fornito l'andamento delle pressioni in camera di combustione che va dai -360° ai +360° di manovella in cui lo zero di  $\alpha$ corrisponde al PMS durante la fase di combustione della miscela; in questo caso il campionamento è stato fatto per ogni grado di rotazione della manovella.

In questi set di dati forniti si è usata una convenzione per l'angolo  $\alpha$  di rotazione diversa dal solito: in particolare si considera  $\alpha$  positivo per una rotazione oraria in modo tale che l'andamento dei grafici all'aumentare di  $\alpha$  coincida con l'andamento dei grafici all'avanzare del tempo. In questo caso, in una prima fase, per fare l'elaborazione dei dati ed organizzarli in un'unica matrice in modo coerente si è utilizzato *Microsoft Excel*<sup>(R)</sup>, solamente in seguito sono stati inseriti nel codice *MATLAB* 2.4.2.

Ora andremo a spiegare la procedura che è stata eseguita per l'analisi dei dati tramite *Excel*: come primo passaggio si è deciso di duplicare i dati in modo tale che si potessero facilmente osservare quelli che si ripetevano oltre i 720° di funzionamento; successivamente si eliminano le righe corrispondenti ai dati che si ripetono; si traslano i dati in modo tale che a 360° corrisponda l'accensione della miscela al PMS, passaggio eseguito confrontando i risultati cinematici precedentemente ottenuti, ma questo non basta in quanto tutta la cinematica si ripete dopo 360°, quindi bisogna osservare ad esempio  $R_{Bx}$  e traslare i dati in modo tale che il picco del grafico ricada nell'intorno dei 360°; ora come ultimo step si possono eliminare i dati precedentemente duplicati in modo tale che abbiamo lo spettro di funzionamento solo per le due rotazioni di manovella. Questi passaggi sono stati riassunti nel caso di  $a_{Gx}$  per 6500 RPM in Figura 2.13.



Figura 2.13: Pulizia dei dati forniti per  $a_{G_x}$  a 6500 RPM

Va sottolineato il fatto che in questi grafici l'asse delle x non corrisponde ancora esattamente ad  $\alpha$ , per questo motivo l'asse x è stato chiamato 'ciclo'. Per risolvere questo problema si passerà ad  $\alpha$  facendo una semplice proporzione, ovvero trasformo il valore di 'ciclo' in modo tale che la prima riga corrisponda a 0° e l'ultima, che coincide con la prima, corrisponda a 720° e i valori intermedi di  $\alpha$ varino linearmente.

Chiaramente operando in questo modo si è fatta una semplificazione in quanto in realtà i dati da *multibody* sono stati campionati a  $\Delta t$  costante che non corrisponde a  $\Delta \alpha$  costante a meno che non si annulli l'accelerazione di manovella. Da analisi successive si è osservato che questa semplificazione portava ad inesattezze, si è corretto non imponendo più soltanto il passaggio per gli 0° e i 720°, ma anche per 90°, 270°, 450° e 630° di cui eravamo sicuri del passaggio essendo dei punti notevoli del funzionamento del manovellismo, in particolare per la velocità angolare della biella che dovrebbe essere zero. Poiché nei dati forniti non sono presenti punti in cui si ha uno zero esatto di  $\omega_2$ , si è adoperata un'interpolazione lineare, automatizzando il tutto con l'implementazione dell'algoritmo nel Paragrafo 2.4.2. In quest'ultimo i valori chiamati  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  rappresentano i valori che compariranno nella Tabella al posto di 90°, 270° ecc.. Ad esempio per 6500 RPM e  $\alpha_0 = 90°$  si ottiene  $\alpha_1 = 89.948°$  e  $\alpha_2 = 91.982°$ . I grafici ottenuti per i tre regimi di rotazioni si trovano in Figura 2.14.



Figura 2.14: Confronto della cinematica e della dinamica per i tre regimi di rotazione

In questo modo abbiamo in parte considerato l'accelerazione angolare di manovella. Tuttavia nella trattazione da qui in poi si considererà  $\omega_1$  costante in quanto dai dati forniti è impossibile ricavare dei grafici puliti di  $\omega_1$  rispetto ad  $\alpha$  se si volesse considerare la sua variabilità. Proprio per quest'ultima in precedenza è stato detto che i dati ci sono stati forniti con un campionamento di circa 2° di  $\alpha$ , ma questa quantità è leggermente variabile tra una riga e l'altra.

Abbiamo già detto che i dati della pressione forniti per i tre regimi di rotazione sono forniti a partire dai -360° ai +360° gradi con un campionamento ogni grado con lo zero di  $\alpha$  corrispondente al PMS durante la fase di combustione. Organizzo un *Excel* avente sulla prima colonna tutti i valori di  $\alpha$  corrispondenti alla pressione così come stati forniti dalla *Piaggio*, ma sommando +360° alla colonna di  $\alpha$ : in questo modo 360° di  $\alpha$  coincide col PMS durante la fase di combustione. Nello stesso foglio *Excel* creo una colonna con i valori di  $\alpha$  appena trovati tramite interpolazione con l'algoritmo nel Paragrafo 2.4.2. A questo punto abbiamo tutti gli elementi per caricare i dati su *MATLAB*. Attraverso una semplice trasformazione si ritorna alla convenzione secondo cui  $\alpha$  è positivo se misurato in verso orario. Ora si può implementare un'interpolazione lineare per trovare i valori di pressione corrispondenti ai valori di  $\alpha$  di cui ci sono stati forniti alcuni dati sulla cinematica e sulla dinamica; i risultati grafici si possono vedere in Figura 2.15.



Figura 2.15: Interpolazione pressione

Nel codice implementato nel Paragrafo 2.4.2, i dati forniti dalla *Piaggio*, una volta filtrati, sono stati identificati con il suffisso \_0, mentre le grandezze di verifica calcolate sono state contrassegnate con \_ver.

L'ultimo passaggio relativo al trattamento dei dati consiste nella rotazione del vettore accelerazione del baricentro di biella e reazioni vincolari, in quanto originariamente espresse rispetto a un sistema di riferimento solidale con la biella, e non rispetto a quello solidale con il telaio del manovellismo. Per effettuare questa trasformazione si utilizza una matrice di rotazione, applicata all'interno del ciclo for. Le quantità risultanti sono state denominate a\_G\_x, a\_G\_y, R\_b\_x, R\_b\_y, R\_p\_x e R\_p\_y.

Le grandezze di verifica sono state calcolate seguendo lo stesso procedimento illustrato nel Capitolo 2.2, adottando quindi un approccio del tutto analogo a quello utilizzato per la validazione del modello del pistone.

Il codice relativo a questa fase è riportato nel Paragrafo 2.4.2, mentre i risultati ottenuti sono mostrati nelle Figure 2.16 e 2.17.



Figura 2.16: Confronto cinematica fornita vs. verificata per 6500RPM



Figura 2.17: Confronto reazioni dinamiche fornite vs. verificate per 6500RPM

Dai grafici di confronto è possibile osservare un lieve scostamento nelle grandezze cinematiche, attribuibile alla mancata considerazione dell'accelerazione angolare di manovella. Tale contributo, invece, era stato incluso nel modello di verifica del pistone, determinando uno scostamento molto ridotto, come mostrato nella Figura 2.11. Tuttavia, questa approssimazione non compromette in modo significativo i risultati dinamici, che presentano un andamento sostanzialmente coerente con quello ottenuto tramite simulazione *multibody*.

## 2.4 Codici MATLAB

In questo capitolo si presenteranno per esteso tutti i codici utilizzati con una piccola descrizione sul loro funzionamento. I codici vengono organizzati in base al modello per cui sono stati sviluppati, ovvero se per il modello di validazione del pistone o per il modello per validazione della biella. Per sinteticità non vengono riportati i plot dei grafici, che tuttavia possono essere facilmente generati a seconda delle proprie esigenze.

## 2.4.1 Codici modello *Piaggio* per analisi pistone

### Codice cinematica e dinamica $\alpha_1$ costante

Il codice presentato è stato sviluppato per eseguire uno studio preliminare della cinematica e della dinamica del sistema biella-manovella, trascurando l'influenza dell'accelerazione angolare della manovella. Dopo l'inizializzazione delle variabili geometriche e fisiche (lunghezze, masse, momento d'inerzia, ecc.), si procede con l'acquisizione da input della velocità angolare della manovella ( $w1\_RPM$ ) e dell'angolo  $\alpha_{target}$ , espresso in gradi.

Per alcune configurazioni di riferimento (specifiche coppie  $w1\_RPM$  e  $\alpha_{target}$  fornite da *Piaggio*), il valore della pressione nella camera di combustione viene automaticamente assegnato tramite una struttura condizionale **if**, evitando l'inserimento manuale. In caso contrario, il codice richiede all'utente di inserire manualmente i valori di pressione e accelerazione angolare della manovella.

Successivamente, viene avviato un ciclo **for** sull'intervallo  $[0, 2\pi]$  per l'angolo di manovella  $\alpha$ , in cui vengono calcolate, per ogni passo, le grandezze cinematiche e dinamiche di interesse. Le relazioni utilizzate per i calcoli sono quelle precedentemente dedotte nei Sottoparagrafi 1.2.1 e 1.3. In particolare, la risoluzione della dinamica è affidata a un sistema lineare in forma matriciale.

All'interno del ciclo, si verifica se il valore di  $\alpha$  è sufficientemente vicino a  $\alpha_{\text{target}}$  (entro una tolleranza definita). In tal caso, il programma stampa a schermo un insieme di risultati rilevanti: spostamento, velocità e accelerazione del pistone, velocità e accelerazione angolare della biella, posizione, velocità e accelerazione del baricentro della biella, nonché le reazioni vincolari agenti su di essa.

Infine, il Codice esporta in un file .csv i valori dell'angolo di manovella  $\alpha$  e dell'angolo  $\theta$  formato tra la biella e l'orizzontale, organizzati in due colonne; questo file verrà utilizzato nel codice 2.4.1.

```
2
       r= 0.029414480978; %membro 1 (manovella, movente) in m
 4
       l= 0.098; %membro 2 (biella) in m
5
       d= 0.025431434; %distanza tra bottone di manovella e baricentro biella in m
       d_c=0.058; %diametro del cilindro in m
       m_p=0.240852247; %massa del pistone in chilogrammi
8
       m_sp=0.031015805; %maassa dello spinotto in chilogrammi
9
       m_b=0.153408906; %massa della biella+massa bronzine in chilogrammi
       I_b = 2.43315656723e-4; %momento d'inerzia lungo z della biella in Kg*m^2
       gamma=0; %angolo di decentramento in gradi
       gamma_rad=deg2rad(gamma);
14
       k=(r+1)*sin(gamma_rad);
16
       w1_RPM = input("Inserisci il valore degli RPM (valori di riferimento " + ...
           "Piaggio sono 6500, 8000 o 9000RPPM): ");
18
       w1 = -w1_RPM * 2*pi/60;
       alpha_rad =0 : 0.0005 : 2*pi;
20
       n= length(alpha_rad);
21
       y=zeros(1,n);
       x=zeros(1,n);
       theta_rad=zeros(1,n);
24
       s=zeros(1,n);
       w2=zeros(1,n);
26
       v=zeros(1,n);
27
       alpha2=zeros(1,n);
       a=zeros(1,n);
29
       x_G=zeros(1,n);
30
       y_G=zeros(1,n);
       v_G_x=zeros(1,n);
       v_G_y = zeros(1, n);
32
       a_G_x=zeros(1,n);
       a_G_y=zeros(1,n);
       w2_deg=zeros(1,n);
36
       alpha2_deg=zeros(1,n);
       tolleranza = 0.0145;
39
       alpha_target = input("inserisci valore di alpha_target:");
40
       if w1_RPM == 6500 && alpha_target == 212.625
41
42
           p = 0.3555;
           alpha1=deg2rad(0);
        elseif w1_RPM == 6500 && alpha_target == 358.759
           p = 0.001;
45
46
           alpha1=deg2rad(0);
47
       elseif w1_RPM == 6500 && alpha_target == 344.520
           p = 6.8232;
48
           alpha1=deg2rad(0);
        elseif w1_RPM == 6500 && alpha_target == 320.398
           p = -0.0336;
           alpha1=deg2rad(0);
       elseif w1_RPM == 6500 && alpha_target == 334.693
           p = 5.6438;
           alpha1=deg2rad(0);
```

```
56
        elseif w1_RPM == 8000 && alpha_target == 214.687
            p = 0.3774;
58
            alpha1=deg2rad(0);
        elseif w1_RPM == 8000 && alpha_target == 0.0572958
            p = 0.0012;
61
            alpha1=deg2rad(0);
62
        elseif w1_RPM == 8000 && alpha_target == 344.376
            p = 6.3663;
63
64
            alpha1=deg2rad(0);
65
        else
            w1_RPM = input("inserisci il valore di velocita' angolare in RPM): ");
67
68
            p = input("inserisci la pressione in camera di combustione corrispondente
                (in MPa): "):
            alpha1 = input("inserisci l'acc angolare della manovella (in rad/s^2):");
        end
71
        F_p=pi*(d_c/2)^2*p*10^6;
73
        a_B_M = w1^2 r;
        a_B_M_x=-a_B_M*cos(deg2rad(alpha_target));
76
        for i = 1: n
        s(i) = r*cos(alpha_rad(i))+sqrt(r^2*cos(alpha_rad(i))^2-r^2+l^2-k^2+2*k*r*sin(
            alpha_rad(i)));
78
        x(i) = -r*cos(alpha_rad(i))+s(i);
        y(i) = -r*sin(alpha_rad(i))+k;
80
        theta_rad(i) = atan2(y(i),x(i));
81
        w2(i) = -w1*r*cos(alpha_rad(i))/ (l*cos(theta_rad(i)));
        v(i) = -w1*r*sin(alpha_rad(i)) - l*sin(theta_rad(i))*w2(i);
82
83
        alpha2(i) = (r*w1^2*sin(alpha_rad(i))+l*w2(i)^2*sin(theta_rad(i))-r*cos(
            alpha_rad(i))*alpha1)/(l*cos(theta_rad(i)));
84
        a(i) = -r*w1^2*cos(alpha_rad(i))-l*w2(i)^2*cos(theta_rad(i))-l*sin(theta_rad(i
            ))*alpha2(i)-r*sin(alpha_rad(i))*alpha1;
85
        x_G(i)=r*cos(alpha_rad(i))+d*cos(theta_rad(i));
86
        y_G(i)=(d-1)*sin(theta_rad(i))+k;
        v_G_x(i) = -r*w1*sin(alpha_rad(i)) - d*w2(i)*sin(theta_rad(i));
87
88
        v_G_y(i) = (d-1) * w2(i) * cos(theta_rad(i));
        a_G_x(i)=-r*w1^2*cos(alpha_rad(i))-r*sin(alpha_rad(i))*alpha1-d*w2(i)^2*cos(
89
            theta_rad(i))-d*alpha2(i)*sin(theta_rad(i));
90
        a_G_y(i)=-(d-1)*w2(i)^2*sin(theta_rad(i))+(d-1)*alpha2(i)*cos(theta_rad(i));
91
        w2_deg(i)=rad2deg(w2(i));
        alpha2_deg(i)=rad2deg(alpha2(i));
93
        alpha_deg = rad2deg(alpha_rad);
94
        theta_deg = rad2deg(theta_rad);
95
96
        if abs(rad2deg(alpha_rad(i)) - alpha_target) < tolleranza</pre>
            mtrx=[-1 0 0 0;1 0 1 0;0 1 0 1;(d-1)*sin(theta_rad(i)) (l-d)*cos(theta_rad
                (i)) d*sin(theta_rad(i)) -d*cos(theta_rad(i))];
            bcoeff=[F_p+m_p_tot*a(i);m_b*a_G_x(i);m_b * a_G_y(i);I_b * alpha2(i)];
98
99
            inc=mtrx\bcoeff;
            R_p_x = inc(1);
            R_b_x = inc(3);
            R_p_y = inc(2);
            R_b_y = inc(4);
            fprintf('Risultati per alpha_deg = %.3f gradi (indice %d):\n', rad2deg(
```

	alpha_rad(i)), i);
106	<pre>fprintf('Risultati per p = %.3f Mpa (indice %d):\n', p, i);</pre>
107	<pre>fprintf('Angolo theta: %.6f gradi\n', theta_deg(i));</pre>
108	fprintf('Accelerazione bottone di manovella: %.6f m/s^2\n', a_B_M);
109	<pre>fprintf('Accelerazione bottone di manovella su x: %.6f m/s^2\n', a_B_M_x);</pre>
110	<pre>fprintf('Accelerazione bottone di manovella su y: %.6f m/s^2\n', a_B_M_y);</pre>
111	<pre>fprintf('Spostamento del pistone: %.6f m\n', s(i));</pre>
112	<pre>fprintf('Velocita' del pistone: %.6f m/s\n', v(i));</pre>
113	fprintf('Velocita' angolare della biella: %.6f rad/s\n', w2(i));
114	<pre>fprintf('Velocita' angolare della biella: %.6f deg/s\n', w2_deg(i));</pre>
115	fprintf('Accelerazione angolare biella: %.6f rad/s^2\n', alpha2(i));
116	fprintf('Accelerazione angolare biella: %.6f deg/s^2\n', alpha2_deg(i));
117	<pre>fprintf('Accelerazione del pistone: %.6f m/s^2\n', a(i));</pre>
118	<pre>fprintf('Posizione x del baricentro della biella: %.6f m\n', x_G(i));</pre>
119	<pre>fprintf('Posizione y del baricentro della biella: %.6f m\n', y_G(i));</pre>
120	<pre>fprintf('Velocita' x del baricentro della biella: %.6f m/s\n', v_G_x(i));</pre>
121	fprintf('Velocita' y del baricentro della biella: %.6f m/s\n', v_G_y(i));
122	fprintf('Accelerazione x del baricentro della biella: %.6f m/s^2\n', a_G_x
	(i));
123	fprintf('Accelerazione y del baricentro della biella: %.6f m/s^2\n', a_G_y
101	(i));
124	fprintf('Reazione piede di biella su biella (R_p_x): %.6f N\n', R_p_x);
125	fprintf('Reazione del cilindro su biella (trasmessa da pistone)(R_p_y):
100	7.61 N(n', K_P_y);
126	Iprinti ('Reazione bottone di manovella su biella lungo x (R_b_x): %.61 N\n
107	', K_D_X);
127	Iprinti ('Reazione bottone di manovella su biella lungo y (R_b_y): %.61 N\n
100	, K_D_y);
128	ena
129	
130	<pre>dat1 = [aipna_rad(:), theta_rad(:)];</pre>
131	writematrix(dati, 'alpha_radvstheta_rad.csv');

Codice 2.1: Codice cinematica e dinamica con  $\alpha_1$  costante

#### Codice correlazione tra $\alpha \in \theta$

Il codice MATLAB sviluppato ha l'obiettivo di correlare una certa configurazione del manovellismo caratterizzata da certi valori di  $\theta$ ,  $a_{B,M,x}$  e  $a_{B,M,y}$  all'angolo  $\alpha$  corrispondente per tre distinti regimi di rotazione del motore, pari a 6500, 8000 e 9000 RPM. Tale passaggio è necessario in quanto, come già osservato nella Figura 2.6, nello spettro dei 360° di funzionamento del meccanismo per un  $\alpha$  corrisponde solo un  $\theta$ , ma non vale il viceversa. Il file di input principale alpha\_radvstheta\_rad.csv, ricavato dal Codice 2.4.1, fornisce la relazione tra l'angolo di rotazione della manovella  $\theta$  e l'angolo della biella  $\alpha$ , entrambi espressi in radianti.

Per ogni regime di rotazione viene caricato il file dati forniti dalla *Piaggio* contenenti, tra le varie grandezze, l'angolo  $\theta$  espresso in gradi e le componenti

 $a_{B,M,x}$  e  $a_{B,M,y}$  dell'accelerazione nel bottone di manovella. I valori di  $\theta$  vengono convertiti in radianti per consentire un confronto diretto con il dataset principale. Successivamente, per ogni valore di  $\theta$ , il codice cerca il corrispondente valore di  $\alpha$  verificando che la differenza tra  $\theta$  e i dati disponibili sia inferiore a una determinata soglia di tolleranza.

Nel caso in cui vengano trovate più soluzioni possibili, viene applicato un criterio di selezione basato sulla proiezione del vettore accelerazione lungo la direzione del versore  $\vec{e_r}$ , orientato lungo l'asse della biella verso il centro della cerniera fissa. Viene scelto il valore di  $\alpha$  associato alla proiezione positiva maggiore, in modo da garantire la coerenza fisica del risultato.

Una volta individuato il valore corretto di  $\alpha$  per ciascun  $\theta$ , i dati vengono convertiti in gradi e salvati in file .csv, specifici per ciascun regime di rotazione. Questi file, denominati theta\_deg vs alpha\_deg, sono destinati a integrare i dati originari relativi ai regimi di rotazione, andando a costituire l'undicesima colonna dei file forniti dalla *Piaggio*. Questi dati verranno utilizzati nel Codice 2.4.1.

```
regimi = [6500, 8000, 9000];
        file_input = {'Dati piaggio 6500.txt', 'Dati piaggio 8000.txt', 'Dati piaggio
 2
            9000.txt'};
        file_output = { 'theta_deg vs alpha_deg 6500.csv', 'theta_deg vs alpha_deg
             8000.csv', 'theta_deg vs alpha_deg 9000.csv'};
        dati = readmatrix('alpha_radvstheta_rad.csv');
5
        alpha_rad_in = dati(:, 1);
6
        theta_rad_in = dati(:, 2);
 7
        tolleranza = 0.0065:
8
9
        for regime_idx = 1:length(regimi)
             input_file = file_input{regime_idx};
             output_file = file_output{regime_idx};
             dati_regime = readmatrix(input_file);
             theta_deg_data = dati_regime(:, 2);
             a_B_M_x_data = dati_regime(:, 5);
a_B_M_y_data = dati_regime(:, 6);
17
             theta_rad_data = deg2rad(theta_deg_data);
             alpha_rad_results = NaN(size(theta_rad_data));
18
19
             for i = 1:length(theta_rad_data)
20
                 theta_target = theta_rad_data(i);
                 a_B_M_x = a_B_M_x_data(i);
                 a_B_M_y = a_B_M_y_data(i);
                 idx = find(abs(theta_rad_in - theta_target) < tolleranza);</pre>
26
                 if isempty(idx)
                      fprintf('Nessun valore di alpha_rad trovato per theta_target = %.3
                          f rad (riga %d, regime %d RPM).\n', ..
theta_target, i, regimi(regime_idx));
28
29
                      continue;
30
                 end
```

```
sorted_idx = sort(idx);
                if length(sorted_idx) > 2
                    distances = diff(sorted_idx);
                    [~, max_distance_idx] = max(distances);
                    selected_idx = [sorted_idx(max_distance_idx), sorted_idx(
                        max_distance_idx + 1)];
36
                else
                    selected_idx = sorted_idx;
38
                end
                alpha_rad_1 = alpha_rad_in(selected_idx(1));
40
                alpha_rad_2 = alpha_rad_in(selected_idx(2));
41
                er_1 = [-cos(alpha_rad_1); -sin(alpha_rad_1)];
42
                er_2 = [-cos(alpha_rad_2); -sin(alpha_rad_2)];
                proj_1 = dot([a_B_M_x; a_B_M_y], er_1);
43
                proj_2 = dot([a_B_M_x; a_B_M_y], er_2);
45
                if proj_1 > 0 && proj_2 <= 0</pre>
46
                    alpha_rad = alpha_rad_1;
47
                elseif proj_2 > 0 && proj_1 <= 0</pre>
                    alpha_rad = alpha_rad_2;
48
                elseif proj_1 > 0 && proj_2 > 0
                    if proj_1 >= proj_2
                        alpha_rad = alpha_rad_1;
                    else
                         alpha_rad = alpha_rad_2;
                    end
                else
                    fprintf('Nessuna soluzione valida trovata per theta_target = %.3f
                         rad (riga %d, regime %d RPM).\n', .
                         theta_target, i, regimi(regime_idx));
58
                    continue;
                end
60
                alpha_rad_results(i) = alpha_rad;
61
            end
            alpha_deg_results = rad2deg(alpha_rad_results);
            output_data = [theta_deg_data, alpha_deg_results];
            writematrix(output_data, output_file, 'Delimiter',
                                                                   . ' ) :
            fprintf('Risultati salvati per il regime %d RPM in "%s".\n', regimi(
                regime_idx), output_file);
        end
        disp('Calcoli completati per tutti i regimi di rotazione.');
```

Codice 2.2: Codice correlazione tra  $\alpha \in \theta$ 

## Codice main per confronto risultati

Questo Codice in grande parte riprende il codice 2.4.1 consentendo di analizzare il comportamento cinematico e dinamico di un manovellismo di spinta in tre differenti regimi di rotazione del motore (6500, 8000 e 9000 RPM). I dati iniziali, tra cui le dimensioni geometriche del sistema (raggio della manovella, lunghezza della biella, posizione del baricentro, ecc.) e le masse coinvolte (pistone, spinotto, biella), vengono definiti come costanti all'inizio del codice.

In seguito vengono caricati i file contenenti i dati forniti relativi a ciascun regime di rotazione, insieme ai file denominati theta\_deg\_vs\_alpha\_deg, ricavati attraverso il codice descritto nel Sottoparagrafo 2.4.1. Successivamente si definiscono le variabili di interesse e si applica una maschera ai dati per selezionare solamente l'intervallo utile, in quanto i dati forniti sono in sovrabbondanza rispetto a quelli necessari per i nostri scopi (cioè il tratto in cui l'angolo  $\alpha$  varia da 0 a  $4\pi$ ). Il filtraggio viene effettuato sulla base della variabile temporale t, e la maschera ottenuta viene poi applicata a tutte le altre grandezze, quali ad esempio p, a, a\_B\_M\_x, w2\_deg, ecc. A questo punto ci si ricalcola l'angolo  $\alpha$  dovendo fare l'ipotesi che  $\omega_1$  sia costante questo perché l'angolo  $\alpha$  ricavato dal codice 2.4.1 è soggetto a piccole variazioni dovute a errori numerici e piccole oscillazioni durante il campionamento al *multibody* e fornisce i dati unicamente nel range [0;  $2\pi$ ] e non [0;  $4\pi$ ]. Questo lo si può osservare nella Figura 2.18.



Figura 2.18:  $\alpha_{sporco}$  vs t

Per ovviare a tale problematica, si è deciso di ricalcolare il valore dell'angolo  $\alpha$  tramite la seguente espressione implementata nel codice:

Tale espressione tiene conto della velocità angolare negativa di manovella. Si tenga presente che in questa relazione la velocità angolare è inserita come input dall'utente come positiva. Dopo la fase di caricamento e filtraggio dei dati, viene avviato un processo iterativo per ogni campione temporale. Durante ogni iterazione si eseguono i calcoli in modo assolutamente analogo a come visto del Codice 2.4.1. Le accelerazioni tangenziali e normali del bottone vengono calcolate mediante la proiezione del vettore di accelerazione lungo i versori locali associati alla biella in modo simile a come si è fatto nel Codice 2.4.1. Le grandezze contrassegnate con il suffisso \_ver rappresentano valori di verifica calcolati internamente, i quali vengono confrontati con i dati sperimentali forniti.

```
r= 0.029414480978;
1= 0.098:
d= 0.025431434;
d_c=0.058;
m_p=0.240852247;
m_sp=0.031015805;
m_p_tot=m_p+m_sp;
m_b=0.153408906;
I_b = 2.43315656723e-4;
gamma=0;
gamma_rad=deg2rad(gamma);
k=(r+1)*sin(gamma_rad);
w1_RPM = input("Inserisci il valore degli RPM (valori di riferimento " + ...
    "Piaggio sono 6500, 8000 o 9000RPPM): ");
dati6500 = readmatrix('Dati piaggio 6500.txt');
dati8000 = readmatrix('Dati piaggio 8000.txt');
dati9000 = readmatrix('Dati piaggio 9000.txt');
dati6500_alpha = readmatrix('theta_deg vs alpha_deg 6500.csv');
dati8000_alpha = readmatrix('theta_deg vs alpha_deg 8000.csv');
dati9000_alpha = readmatrix('theta_deg vs alpha_deg 9000.csv');
if w1_RPM == 6500
    t = dati6500(:, 1);
    theta_deg = dati6500(:, 2); %theta in gradi
    p = dati6500(:, 3); %pressione in MPa
    a = dati6500(:, 4)*10<sup>(-3)</sup>; %acc pistone in m/s<sup>2</sup>
    a_B_M_x = dati6500(:, 5)*10^{-3}; %acc bottone biella su x in m/s^2
a_B_M_y = dati6500(:, 6)*10^{-3}; %acc bottone biella su y in m/s^2
    w2_deg = dati6500(:, 7); %velocita' angolare biella in deg/s
    x = dati6500(:, 8)*10<sup>(-3)</sup>; %posizione bottone su x in m
    y = dati6500(:, 9)*10<sup>(-3)</sup>; %posizione bottone su y in m
    alpha2_deg = dati6500(:, 10); %acc angolare biella in deg/s^2
    alpha_deg_sporco=dati6500_alpha(:, 2); %angolo alpha corrispondente
        calcolato con apposito codice
    range_min = 5.275385e-01;
    range_max = 5.459488e-01;
    mask = (t >= range_min) & (t <= range_max);</pre>
    t = t(mask)-range_min;
    theta_deg = theta_deg(mask);
    p = p(mask);
    a = a(mask);
    a_B_M_x = a_B_M_x(mask);
    a_B_M_y = a_B_M_y(mask);
    w2_deg = w2_deg(mask);
    x = x(mask);
    y = y(mask);
    alpha2_deg = alpha2_deg(mask);
```

48	alpha_deg_sporco = alpha_deg_sporco(mask);
49	
50	
51	elseif w1 RPM == 8000
52	$+ - d_{2} + i 8000(, 1),$
52	t = 440000(., 1),
00 E 4	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}$
04	p = dat(8000(:, 3);
22	a = dat18000(:, 4)*10(-3);
56	$a_B_M_x = dati8000(:, 5)*10(-3);$
57	$a_B_M_y = dati8000(:, 6)*10^{(-3)};$
58	w2_deg = dati8000(:, 7);
59	$x = dati8000(:, 8)*10^{(-3)};$
60	$y = dati8000(:, 9)*10^{(-3)};$
61	alpha2_deg = dati8000(:, 10);
62	<pre>alpha_deg_sporco=dati8000_alpha(:, 2);</pre>
63	$range_min = 4.291667e-01;$
64	$range_max = 4.442917e-01;$
65	<pre>mask = (t &gt;= range_min) &amp; (t &lt;= range_max);</pre>
66	<pre>t = t(mask)-range_min;</pre>
67	<pre>theta_deg = theta_deg(mask);</pre>
68	p = p(mask);
69	a = a(mask):
70	a B M x = a B M x(mask):
71	a B M v = a B M v (mask)
72	$w^2 deg = w^2 deg(mask)$
73	w = v(mask)
74	v = v(mask);
75	$y = y(\max),$
76	alphaz_deg = alphaz_deg(mask),
70	alpha_deg_sporco - alpha_deg_sporco(mask);
70	
18	elself $WI_RPM == 9000$
79	t = datig000(:, 1);
80	theta_deg = $dat19000(:, 2);$
81	p = dati9000(:, 3);
82	$a = dati9000(:, 4)*10^{(-3)};$
83	$a_B_M_x = dati9000(:, 5)*10^{-}(-3);$
84	$a_B_M_y = dati9000(:, 6)*10^{(-3)};$
85	w2_deg = dati9000(:, 7);
86	$x = dati9000(:, 8)*10^{(-3)};$
87	$y = dati9000(:, 9)*10^{(-3)};$
88	alpha2_deg = dati9000(:, 10);
89	<pre>alpha_deg_sporco=dati9000_alpha(:, 2);</pre>
90	$range_min = 3.808889e-01;$
91	$range_max = 3.942593e-01;$
92	<pre>mask = (t &gt;= range_min) &amp; (t &lt;= range_max);</pre>
93	<pre>t = t(mask)-range_min;</pre>
94	<pre>theta_deg = theta_deg(mask);</pre>
95	p = p(mask);
96	a = a(mask);
97	$a_B_M_x = a_B_M_x(mask);$
98	$a_B_M_y = a_B_M_y(mask);$
99	$w2_deg = w2_deg(mask);$
100	x = x(mask);
101	v = v(mask);
102	alpha2_deg = alpha2_deg(mask):
103	alpha_deg_sporco = alpha deg sporco(mask):

101	
104	
105	else
106	disp('Inserire un valore valido di RPM.');
107	end
108	
109	$w^2 = deg^2 rad(w^2 deg)$ :
110	n= length(t).
111	
110	
112	
113	F_p=zeros(1,n);
114	$R_p_x = zeros(1, n);$
115	$R_p_y = zeros(1, n);$
116	$R_B_x = zeros(1, n);$
117	$R_B_y = zeros(1, n);$
118	alpha_deg = zeros(1, n);
119	alpha_rad= zeros(1, n);
120	$s_ver = zeros(1,n);$
121	x  ver = 2 eros(1, n);
122	v ver = zeros(1,n):
123	theta rad ver = zeros(1 n).
120	$w_2$ ver = zeros(1 n).
125	$W_{2} = 2 \cos(1, n);$
120	$v_{\perp}$ ver $-$ zeros(1, $\pi$ );
120	alpha2_ver = zeros(1, n);
120	a_ver = zeros(1, n);
128	$x_G_ver = zeros(1,n);$
129	$y_G_ver = zeros(1,n);$
130	$v_G_x_ver = zeros(1,n);$
131	$v_G_y_ver = zeros(1,n);$
132	$a_G_x = zeros(1,n);$
133	a_G_y = zeros(1,n);
134	
135	for i = 1: n
136	<pre>theta_rad_i = deg2rad(theta_deg(i));</pre>
137	$alpha_rad_i = -t(i)*4*pi*w1_RPM/120 + 4*pi;$
138	alpha_deg_i=rad2deg(alpha_rad_i);
139	alpha rad(i)=alpha rad i:
140	alpha deg(i) = rad2deg(alpha rad i):
141	$F_{n}(i) = ni * (d_{n}(2))^{2} * n(i) * 10^{2} 6$
149	= P(I) - P(I)
142	$a_{D}m = [a_{D}m_{A}(1), a_{D}m_{2}(1)],$
140	$e_{I} = [-\cos(\alpha I p n a_{I} a \alpha_{I})];$
144	et = [-sin(alpha_rad_1); cos(alpha_rad_1)];
145	$a\_B\_M\_t = dot(a\_B\_M, et);$
146	$a_B_M_n = dot(a_B_M, er);$
147	$w1(i) = -sqrt(a_B_M_n / r);$
148	OB = [r * cos(alpha_rad_i); r * sin(alpha_rad_i); 0];
149	alpha1_modulo = abs(a_B_M_t / r);
150	alpha1_vector = [0; 0; alpha1_modulo];
151	<pre>cross_product = cross(alpha1_vector, OB);</pre>
152	<pre>cross_projection_et = dot(cross_product(1:2), et);</pre>
153	if sign(cross_projection_et) == sign(a B M t)
154	alpha1(i) = alpha1 modulo:
155	else
156	alpha1(i) = -alpha1 modulo:
157	end
158	
150	$e_{\text{ver}}(i) = recor(a)$ the rad(i) + cort(r <sup>2</sup> ) cor(a) the rad(i) <sup>2</sup> - r <sup>2</sup> + 1 <sup>2</sup>
100	$S_vor(1) = 1*cos(arpna_rau(1)) + Sqrt(1 2*cos(arpna_rau(1)) 2 = 1 2 + 1 2$

```
- k^2 + 2*k*r*sin(alpha_rad(i)));
                             x_ver(i) = -r*cos(alpha_rad(i)) + s_ver(i);
                             y_vr(i) = -r*sin(alpha_rad(i)) + k;
                             theta_rad_ver(i) = atan2(y_ver(i), x_ver(i));
                             w2_ver(i) = -w1(i)*r*cos(alpha_rad(i)) / (l*cos(theta_rad_ver(i)));
                             v_ver(i) = -w1(i)*r*sin(alpha_rad(i)) - l*sin(theta_rad_ver(i))*w2_ver(i);
                             alpha2_ver(i) = (r*w1(i)^2*sin(alpha_rad(i)) + 1*w2_ver(i)^2*sin(alpha_rad(i)) + 1*w2_ver(i)) + 1*w2_ver(i) + 1*w2_ver(i)) + 1*w2_ver(i) + 1*w2_ver(i)) + 1*w2_ver(i) + 1*w2_ver(i)) + 1*w2_ver(i) + 1*w2_ver(i)) + 1*w2_ver(
                                      theta_rad_ver(i)) - r*cos(alpha_rad(i))*alpha1(i)) / (l*cos(
                                      theta_rad_ver(i)));
                              a_ver(i) = -r*w1(i)^2*cos(alpha_rad(i)) - l*w2_ver(i)^2*cos(theta_rad_ver(
                                      i)) - l*sin(theta_rad_ver(i))*alpha2_ver(i) - r*sin(alpha_rad(i))*
                                      alpha1(i);
                             x_G_ver(i) = r*cos(alpha_rad(i)) + d*cos(theta_rad_ver(i));
                             y_G_ver(i) = (d-1)*sin(theta_rad_ver(i)) + k;
168
                             v_G_x_ver(i) = -r*w1(i)*sin(alpha_rad(i)) - d*w2_ver(i)*sin(theta_rad_ver(i))
                                      i)):
                             v_G_y_ver(i) = (d-1)*w2_ver(i)*cos(theta_rad_ver(i));
                             a_G_x(i) = -r*w1(i)^2*cos(alpha_rad(i)) - r*sin(alpha_rad(i))*alpha1(i) -
d*w2_ver(i)^2*cos(theta_rad_ver(i)) - d*alpha2_ver(i)*sin(
                                      theta_rad_ver(i));
                             a_G_y(i) = -(d-1)*w2_ver(i)^2*sin(theta_rad_ver(i)) + (d-1)*alpha2_ver(i)*
                                      cos(theta_rad_ver(i));
                             a_G_x_i=a_G_x(i);
174
                             a_G_y_i=a_G_y(i);
          i
                             mtrx = [
                                       -1, 0,
                                                         0, 0;
                                       1, 0, 1, 0;
0, 1, 0, 1;
180
                                       (d - 1) * sin(theta_rad_i), (1 - d) * cos(theta_rad_i), d * sin(
                                                theta_rad_i), -d * cos(theta_rad_i)
181
                             ];
182
                             bcoeff = [
                                      F_p(i) + m_p_tot * a(i);
184
                                      m_b * a_G_x_i;
185
                                      m_b * a_G_y_i;
186
                                      I_b * deg2rad(alpha2_deg(i))
187
                             1:
                             reactions = mtrx \ bcoeff;
189
                             R_p_x(i) = reactions(1);
                             R_p_y(i) = reactions(2);
190
                             R_B_x(i) = reactions(3);
192
                             R_B_y(i) = reactions(4);
                    end
                    theta_deg_ver = rad2deg(theta_rad_ver);
196
                    w2_deg_ver = rad2deg(w2_ver);
                    alpha2_deg_ver = rad2deg(alpha2_ver);
```

Codice 2.3: Codice main per confronto risultati

## 2.4.2 Codici modello *Piaggio* per analisi biella

Codice interpolazione

```
2
       w1_RPM = input("Inserisci il valore degli RPM (valori di riferimento Piaggio
           sono 6500, 8000 o 10600RPM): ");
3
        if w1_RPM == 6500
           n = 343:
        elseif w1_RPM == 8000
6
           n = 354;
        elseif w1_RPM == 10600
8
           n = 354;
9
       else
            error('RPM non valido. Scegliere tra 6500, 8000 o 10600.');
       end
       w2_1 = input("Inserisci di w2\_1 da Excel: ");
       w2_2 = input("Inserisci di w2\_2 da Excel: ");
14
       alpha_0 = input("Inserisci il valore di alpha\_0 (90, 270, 450 o 630): ");
       alpha_1 = alpha_0 + w2_1 / (w2_2 - w2_1) * 720 / n;
       alpha_2 = alpha_1 + 720 / n;
```

Codice 2.4: Codice interpolazione per calcolare  $\alpha_1 \in \alpha_2$  a partire da  $\alpha_0$ 

### Codice main per confronto risultati

Il codice sviluppato ha lo scopo di confrontare i dati forniti da *Piaggio* (filtrati e rielaborati in *Excel*) con quelli ottenuti tramite calcolo diretto nel modello dinamico del manovellismo. In particolare, dopo aver importato i dati sperimentali relativi a tre condizioni di regime (6500, 8000 o 10600 RPM) e i corrispondenti valori di pressione in camera di combustione, viene effettuata una trasformazione del sistema di riferimento per riportare l'angolo  $\alpha$  alla convenzione secondo cui esso è positivo se misurato in senso orario, con il PMS centrato a 360°. Questo è stato realizzato nel codice attraverso la seguente istruzione:

```
alpha_data = -alpha_data + 720;
```

Viene quindi eseguita un'interpolazione lineare per determinare i valori della pressione corrispondenti ai valori di  $\alpha$  associati ai dati cinematici e dinamici disponibili. Successivamente, all'interno di un ciclo **for**, vengono ricalcolate tutte le grandezze cinematiche e dinamiche del sistema biella-manovella, tra cui: lo spostamento del pistone, la posizione e la velocità del baricentro della biella, le accelerazioni lineari e angolari, e le reazioni vincolari. Tali passaggi vengono eseguiti secondo una logica del tutto analoga a quella adottata negli altri codici precedentemente descritti.

Parallelamente, i dati sperimentali relativi all'accelerazione del baricentro della biella e alle reazioni vincolari, originariamente espressi in un sistema solidale con la biella, vengono trasformati in un sistema di riferimento solidale con il telaio. La trasformazione è realizzata mediante l'applicazione di una matrice di rotazione definita come:

$$R_{\mathrm{cw},i} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{\mathrm{rad}}(i)) & -\sin(\theta_{\mathrm{rad}}(i)) \\ \sin(\theta_{\mathrm{rad}}(i)) & \cos(\theta_{\mathrm{rad}}(i)) \end{bmatrix}$$

In questo modo è possibile effettuare un confronto diretto tra i dati forniti e quelli calcolati, i cui risultati sono presentati graficamente nelle sezioni successive.

1

2	
3	r = 0.0293;
4	1= 0.098;
5	d= 0.02543550556;
6	d_c=0.0615;
7	m_p=0.11;
8	$m_{sp} = 0.031;$
9	<pre>m_p_tot=m_p+m_sp;</pre>
10	m_b=0.15250165243;
11	I_b = 2.41933035e-4;
12	gamma=0;
13	gamma_rad=deg2rad(gamma);
14	k=(r+1)*sin(gamma_rad);
15	w1_RPM = input("Inserisci il valore degli RPM (valori di riferimento " +
16	"Piaggio sono 6500, 8000 o 10600RPPM): ");
17	
10	$11 \text{ WI_RPM} = 6500$
19	<pre>m = readmatrix('lesi Excel.xisx', 'Sneet', 'bb00', 'kange', 'A2:1344'); INTeresterin('Trest Excel.xisx', 'Sneet', 'bboth', 'action of the set of the</pre>
20	INTEReadmatrix('Test Excel.xisx', 'Sneet', '6500 interp', 'Mange', 'A2:B/22
21	alpha dag = $M(\cdot, 1)$ , Yalpha in gradi
22	arguage = $(\cdot, \cdot) * 10^{\circ} (-3) \cdot 4 \text{ arguar}$ basic structure biells lungo x m/s <sup>2</sup>
23	a G v $0 = M(\cdot, 3) *10^{\circ}(-3)$ , Macc baricentro biella lungo v m/s <sup>2</sup>
24	alpha2 = M(:, 4): %acc angolare biella in rad/s <sup>2</sup> 2
25	$w^2 = M(:, 5)$ ; %velocita' angolare biella in rad/s
26	$R_b_x_0 = M(:, 7); \text{ in } N$
27	$R_b_y_0 = M(:, 6);$
28	$R_p_x_0 = M(:, 9);$
29	$R_p_y_0 = M(:, 8);$
30	alpha_data = INT(:, 1); %alpha in gradi per pressioni positivo in verso
ĺ	antiorario
31	p_data = INT(:, 2); %pressione in Bar da interpolare
32	
33	elseif w1_RPM == 8000
34	<pre>M = readmatrix('Tesi Excel.xlsx', 'Sheet', '8000','Range', 'A2:I355');</pre>
35	INT=readmatrix('Tesi Excel.xlsx', 'Sheet', '8000 interp','Range', 'A2:B722
	');

```
36
             alpha_deg = M(:, 1);
             a_G_x_0= M(:, 2)*10^(-3);
             a_G_y_0= M(:, 3)*10^(-3);
38
39
             alpha2 = M(:, 4);
40
             w2 = M(:, 5);
             R_b_x_0 = M(:, 7);
41
42
             R_b_y_0 = M(:, 6);
43
             R_p_x_0 = M(:, 9);
             R_p_y_0 = M(:, 8);
44
45
             alpha_data = INT(:, 1);
46
             p_data = INT(:, 2);
47
48
        elseif w1_RPM == 10600
             M = readmatrix('Tesi Excel.xlsx', 'Sheet', '10600', 'Range', 'A2:I355');
INT=readmatrix('Tesi Excel.xlsx', 'Sheet', '10600 interp', 'Range', 'A2:
49
50
                 B722');
             alpha_deg = M(:, 1);
             a_G_x_0= M(:, 2)*10^(-3);
             a_G_y_0= M(:, 3)*10^(-3);
54
             alpha2 = M(:, 4);
             w2 = M(:, 5);
             R_b_x_0 = M(:, 7);
56
             R_b_y_0 = M(:, 6);
58
             R_p_x_0 = M(:, 9);
             R_p_y_0 = M(:, 8);
             alpha_data = INT(:, 1);
61
             p_data = INT(:, 2);
62
        else
64
             disp('Inserire un valore valido di RPM.');
        end
65
66
67
        alpha_data=-alpha_data+720;
68
        alpha_deg=-alpha_deg+720;
69
        p = interp1(alpha_data, p_data, alpha_deg, 'linear');
        n= length(alpha_deg);
71
        y=zeros(1,n);
72
        x=zeros(1,n);
        theta_rad=zeros(1,n);
74
        s=zeros(1,n);
75
        w2_ver=zeros(1,n);
76
        v=zeros(1,n);
77
        alpha2_ver=zeros(1,n);
78
        a=zeros(1,n);
        x_G=zeros(1,n);
80
        y_G=zeros(1,n);
81
        v_G_x=zeros(1,n);
82
        v_G_y=zeros(1,n);
83
        a_G_x_ver=zeros(1,n);
84
        a_G_y_ver=zeros(1,n);
85
        R_p_x_ver = zeros(1, n);
86
        R_p_y_v = zeros(1, n);
        R_b_x_v = zeros(1, n);
87
        R_b_y_v = zeros(1, n);
88
89
        a_B_M = zeros(1, n);
```

90

a\_B\_M\_x = zeros(1, n);

```
a_B_M_y = zeros(1, n);
        a_G_x = zeros(1, n);
        a_G_y= zeros(1, n);
        R_b_x = zeros(1, n);
        R_b_y= zeros(1, n);
        R_p_x = zeros(1, n);
96
97
        R_p_y = zeros(1, n);
        w1 = -w1_RPM * 2 * pi/60 * ones(n, 1);
99
        alpha1= zeros(n, 1);
100
        alpha_rad=deg2rad(alpha_deg);
        w2_deg=rad2deg(w2);
        alpha2_deg=rad2deg(alpha2);
        for i = 1: n
106
        s(i) = r*cos(alpha_rad(i))+sqrt(r^2*cos(alpha_rad(i))^2-r^2+l^2-k^2+2*k*r*sin(
            alpha_rad(i)));
        x(i) = -r*cos(alpha_rad(i))+s(i);
        y(i) = -r*sin(alpha_rad(i))+k;
        theta_rad(i) = atan2(y(i),x(i));
        w2_ver(i)=-w1(i) * r * cos(alpha_rad(i)) / (l * cos(theta_rad(i)));
        v(i) = -w1(i)*r*sin(alpha_rad(i))- l*sin(theta_rad(i))*w2_ver(i);
        alpha2_ver(i) = (r * w1(i)^2 * sin(alpha_rad(i)) + 1 * w2_ver(i)^2 * sin(
            theta_rad(i)) - r * cos(alpha_rad(i)) * alpha1(i)) / (l * cos(theta_rad(i)
            ));
        a(i) = -r*w1(i)^2*cos(alpha_rad(i))-l*w2_ver(i)^2*cos(theta_rad(i))-l*sin(
            theta_rad(i))*alpha2_ver(i)-r*sin(alpha_rad(i))*alpha1(i);
        x_G(i)=r*cos(alpha_rad(i))+d*cos(theta_rad(i));
        y_G(i)=(d-1)*sin(theta_rad(i))+k;
        v_G_x(i) = -r*w1(i)*sin(alpha_rad(i)) - d*w2_ver(i)*sin(theta_rad(i));
        v_G_y(i) = (d-1) * w_2_ver(i) * cos(theta_rad(i));
118
        a_G_x_ver(i)=-r*w1(i)^2*cos(alpha_rad(i))-r*sin(alpha_rad(i))*alpha1(i)-d*
            w2_ver(i)^2*cos(theta_rad(i))-d*alpha2_ver(i)*sin(theta_rad(i));
        a_G_y_ver(i)=-(d-1)*w2_ver(i)^2*sin(theta_rad(i))+(d-1)*alpha2_ver(i)*cos(
            theta_rad(i));
120
        F_p = pi * (d_c / 2)^2 * p(i) * 1e5; % Forza dovuta alla pressione
        mtrx = [-1 0 0 0; 1 0 1 0; 0 1 0 1; (d - 1) * sin(theta_rad(i)), (1 - d) * cos
            (theta_rad(i)), d * sin(theta_rad(i)), -d * cos(theta_rad(i))];
        bcoeff = [F_p + m_p_tot * a(i); m_b * a_G_x_ver(i); m_b * a_G_y_ver(i); I_b *
            alpha2_ver(i)];
        inc = mtrx \ bcoeff;
        R_p_x_ver(i) = inc(1);
        R_p_y_ver(i) = inc(2);
126
        R_b_x_ver(i) = inc(3);
        R_b_y_ver(i) = inc(4);
130
        a_B_M(i)=w1(i)^2*r;
        a_B_M_x(i)=-a_B_M(i)*cos(deg2rad(alpha_rad(i)));
        a_B_M_y(i)=-a_B_M(i)*sin(deg2rad(alpha_rad(i)));
        a_G_0_i = [a_G_x_0(i), a_G_y_0(i)];
        R_cw_i = [cos(theta_rad(i)), -sin(theta_rad(i));
136
        sin(theta_rad(i)), cos(theta_rad(i))];
a_G_i = (R_cw_i * a_G_0_i.')';
138
```

91

```
139R_b_i = (R_cw_i * R_b_0_i.')';140R_p_i = (R_cw_i * R_p_0_i.')';141a_G_x(i) = a_G_i(:, 1);142a_G_y(i) = a_G_i(:, 2);143R_b_x(i) = R_b_i(:, 1);144R_b_y(i) = R_b_i(:, 2);145R_p_x(i) = R_p_i(:, 1);146R_p_y(i) = R_p_i(:, 2);147148
```

Codice 2.5: Codice main per confronto risultati

# 3 Analisi agli elementi finiti

# 3.1 Introduzione

In questo capitolo viene descritto il processo di creazione del modello FEM utilizzato per l'analisi strutturale della biella nella configurazione *baseline*, ovvero quella in cui non sono state ancora applicate modifiche geometriche. Si illustrerà la scelta della condizione di carico su cui si è deciso di effettuare l'analisi, il procedimento seguito per la generazione della mesh, progettata per garantire un buon compromesso tra accuratezza dei risultati e tempi di calcolo contenuti. Infine, verranno discussi i risultati ottenuti dall'analisi strutturale, ponendo le basi per il passo successivo, ovvero l'ottimizzazione della geometria mediante tecniche di *morphing parametrico*. Tuttavia, prima di procedere con tali attività, è opportuno introdurre alcuni concetti teorici fondamentali relativi agli strumenti di calcolo ad alta fedeltà (*high-fidelity tools*) impiegati in questa fase.

Gli strumenti *high-fidelity*, come i solutori FEM avanzati e i software di simulazione multifisica, rappresentano oggi una risorsa estremamente potente nelle mani dell'ingegnere. Essi permettono di modellare con grande accuratezza la risposta meccanica, termica e dinamica di componenti complessi, riducendo la necessità di prototipazione fisica e accelerando i cicli di sviluppo riducendo notevolmente i costi. Questi strumenti consentono, ad esempio, di valutare distribuzioni di sforzo in modo puntuale, di effettuare previsioni di vita a fatica e di analizzare l'influenza di piccole variazioni geometriche sul comportamento globale del sistema.

Tuttavia, è fondamentale sottolineare che tali strumenti, per quanto sofisticati, non possono essere considerati come *black box* infallibili. Bisogna impostare l'analisi manualmente avendo bene in mente quali sono le ipotesi semplificative che si stanno facendo; infine, il solutore restituisce sempre un risultato numerico, ma spetta all'ingegnere il compito di interpretarlo con spirito critico. Errori nella definizione delle condizioni al contorno, nella scelta dei parametri del materiale o nella discretizzazione della mesh possono condurre a risultati formalmente corretti dal punto di vista numerico, ma completamente errati dal punto di vista fisico. È dunque imprescindibile conoscere le potenzialità e, allo stesso tempo, le limitazioni dello strumento utilizzato, per evitare decisioni progettuali basate su dati non affidabili.

Solo attraverso una comprensione profonda del metodo numerico impiegato e un continuo confronto con l'esperienza ingegneristica è possibile trarre il massimo beneficio dagli strumenti di simulazione avanzata, mantenendo sempre il controllo critico del processo di analisi.

# 3.2 Fondamenti del metodo agli elementi finiti

Il metodo agli elementi finiti (FEM) è un processo di discretizzazione che, attraverso l'uso di modelli matematici e tecniche di calcolo numeriche, rende possibile lo studio di problemi particolarmente complessi. La scienza delle costruzioni ci insegna che si può risolvere esattamente lo stato tensionale e delle deformazioni di una trave sollecitata che rispetta certe ipotesi, prerogativa che hanno solo pochi altri sistemi. Tuttavia, gli oggetti che ci circondano, soprattutto quelli di particolare interesse ingegneristico, sono di forme ben più complesse, il che rende impossibile la loro risoluzione per via analitica. Un passaggio necessario è quello di passare da un modello continuo a uno discretizzato in tanti piccoli elementi chiamati elementi finiti (EF) che andranno a formare nel loro complesso una griglia, detta mesh. Gli elementi finiti possono essere di varia forma e avere una geometria monodimensionale (asta e trave), bidimensionale (come piastra e membrana) o tridimensionale (elementi brick o tetraedrici). E' importante sottolineare che la soluzione dipende strettamente dal tipo di discretizzazione scelta. Nell'ambito della meccanica delle strutture si possono affrontare problemi di vario tipo. Dal punto di vista del comportamento del materiale possiamo trovare materiali:

- Elastici lineari: ovvero possiamo studiare materiali che in un certo range di sollecitazione seguono la relazione tra *stress* e *strain* della legge di Hooke  $\sigma = E\epsilon;$
- Elastici non lineari: ad esempio se si stanno studiando dei materiali iperelastici, ovvero quei materiali che hanno le deformazioni reversibili ma non seguono la legge di Hooke;

- Plastici: se si vuole studiare il campo plastico del materiale una volta se si supera il limite di snervamento  $\sigma_y$ ;
- Viscoplastici: per tutti quei materiali, come il polietilene, il cui comportamento dipende anche dal tempo.

Dal punto di vista del dominio temporale si possono fare anche in questo caso vari tipi di problemi:

- Statici: ovvero tutti quei problemi in cui le forze sono applicate in modo statico e si è raggiunta una condizione di equilibrio;
- Stazionari: ad esempio per analisi termiche in cui non vogliamo studiare il transitorio per raggiungere una certa condizione di equilibrio termico, ma vogliamo solo studiare gli effetti della temperatura sul sistema.
- Transitoria: è un analisi di integrazione al passo che può essere applicata sia a sistemi lineari che non. Ad ogni step si deve considerare la condizione precedentemente calcolata e la forzante applicata.
- Dinamici: quando le forze di inerzia risultano paragonabili a quelle elastoplastiche, anch'esse possono essere lineari o non lineari. Casi particolari di queste analisi sono: analisi modale, analisi armonica e analisi spettrale;
- Dinamici impulsivi: quando si vuole studiare come reagisce una struttura ad un carico impulsivo ovvero ad una forza in modulo molto elevata ma che viene applicata per un ristretto lasso di tempo.

Le principali tipologie di analisi si possono tuttavia suddividere in analisi lineari e non lineari. Le analisi lineari sono computazionalmente molto meno onerose e hanno il grande vantaggio che esiste sempre ed è unica la soluzione al problema. Mentre questo non si può dire nei problemi non lineari in cui non esiste una soluzione unica, in quanto la si ottiene per via iterativa aumentando progressivamente il carico applicato. Di default *Ansys* aumenta il carico in modo lineare, ma questo non è detto che sia il percorso migliore. L'obiettivo in queste analisi è arrivare alla convergenza della soluzione che può essere dal basso oppure oscillatoria. Le principali cause di non linearità sono: plasticizzazione, contatti, grandi spostamenti della struttura, unilarità di contatto per la presenza di vincoli unilaterali come un semplice appoggio, danneggiamento causato da microvuoti ecc.
Alla fine, anche per sistemi non lineari, si andrà sempre a risolvere uno o più sistemi lineari nella forma [2]:

$$\vec{F} = [K]\vec{x} \tag{3.1}$$

Dove  $\vec{F}$  è il vettore delle forze applicate,  $\vec{x}$  sono gli spostamenti nodali e [K] è la matrice di rigidezza del sistema. Si potrebbe pensare di risolvere questo problema semplicemente invertendo la matrice di rigidezza, questo passaggio seppur teoricamente corretto è nella pratica impossibile in quanto computazionalmente troppo oneroso. Dall'algebra lineare sappiamo che una matrice è invertibile solamente quando è quadrata con determinante diverso da zero, in questo caso si può utilizzare un algoritmo basato sulla matrice dei cofattori per calcolare l'inversa. Se proviamo ad implementare questo algoritmo già vedremo che per una semplice matrice 6x6 si avrà un certo errore dovuto al troncamento che fa il codice di calcolo. L'errore per l'inversa viene calcolato semplicemente moltiplicando la matrice inversa con la matrice di partenza e vedendo quanto la matrice risultante si discosta dalla matrice identità. Gli errori di troncamento sono dovuti al fatto che l'algoritmo fa delle operazioni tra le quantità sulla diagonale, che sono molto grandi, e delle quantità fuori la diagonale, che invece sono molto piccole.

Per ovviare a questo problema di troncamento si potrebbero aumentare di molto le cifre significative che rimangono in memoria nel computer, tuttavia è veloce dimostrare che per 16 cifre significative già per un numero basso di elementi si hanno dei file che superano facilmente il Terabyte per memorizzare solo la matrice [K]. Tuttavia va sottolineato che la matrice [K] è generalmente simmetrica. In generale gli errori numerici sono un grande problema degli elementi finiti, ad esempio quando si ha l'interazione tra due strutture aventi matrice di rigidezza con ordini di grandezza molto diversi; per ovviare a questi problemi si fanno tutta una serie di operazioni che dal punto di vista analitico non cambiano nulla, ma dal punto di vista numerico aiutano; come la pre-moltiplicazione delle matrici per far avere simili ordini di grandezza, oppure nell'algoritmo vogliamo spostare gli errori grandi alla fine dell'algoritmo e non all'inizio per non inficiare i calcoli successivi.

Un aspetto principale negli elementi finiti è il concetto di *nodo*. Il nodo è un punto specifico nella geometria della mesh dove gli elementi finiti si connettono tra loro, anche se in generale si potrebbero avere anche dei nodi in posizioni intermedie che non dialogano con altri elementi finiti, ad esempio si possono avere EF di tipo trave con 3 o 4 nodi. I nodi sono i punti in cui si calcolano le variabili di interesse, come spostamenti, temperature o pressioni. La posizione e il numero dei nodi determinano la risoluzione della mesh e, di conseguenza, la precisione dell'analisi. I gradi di libertà rappresentano le direzioni in cui un nodo può muoversi o ruotare. In un'analisi FEM, i GdL sono le incognite principali da determinare. Il numero e il tipo di GdL dipendono dalla dimensionalità del problema e dal tipo di elemento utilizzato. In generale, possiamo dire che gli elementi 1D hanno 6 GdL per nodo: tre traslazioni e 3 rotazioni. Mentre gli EF 3D hanno solo tre traslazioni per nodo, questo perché nella realtà i punti possono solo traslare e le rotazioni non sono nient'altro che un gradiente di traslazioni, infatti, nella meccanica del continuo non si parla mai di rotazioni, ma solo di traslazioni. L'introduzione delle rotazioni diviene necessaria quando si passa da un corpo tridimensionale ad uno monodimensionale per poter considerare la rotazione delle sezioni rette della trave che devono rimanere ortogonali alla linea media e indeformate per la teoria della trave.

Uno degli aspetti che più di tutti impatta sull'onere computazionale del calcolo è la minimizzazione della banda della matrice [K] che viene fatta utilizzando appositi algoritmi che enumerano i GdL dei nodi in modo intelligente. Una matrice quadrata  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  si dice bandata se i suoi elementi non nulli sono confinati in prossimità della diagonale principale. Più precisamente, la matrice [A] ha banda inferiore l e banda superiore u se:

$$a_{i,j} = 0 \quad \text{per} \quad |i - j| > k$$

dove  $k = \max(l, u)$ .

La larghezza della banda totale (o semplicemente banda) della matrice è data da:

$$banda = l + u + 1$$

dove il termine +1 include la diagonale principale stessa.

I metodi per risolvere sistemi lineari di grandi dimensioni si possono suddividere in metodi iterativi e metodi diretti. Il metodo iterativo principale è quello di *Gauss-Seidelm*, questo come tutti i metodi iterativi, necessita di una prima soluzione di partenza e non si può determinare a priori il numero di passaggi necessario per arrivare a convergenza. Per quanto riguarda i metodi diretti, il principale è il metodo di eliminazione di Gauss ed è anche quello maggiormente usato dai codici di calcolo. Tuttavia, molto utilizzati sono anche i metodi basati su decomposizione LU o *Cholesky*.

In molti casi pratici, come nel metodo degli elementi finiti (FEM), le matrici che si ottengono dall'assemblaggio del sistema sono sparse e bandate, il che significa che la maggior parte dei coefficienti sono nulli e i valori non nulli si concentrano attorno alla diagonale. Questa struttura può essere sfruttata per ottimizzare l'uso della memoria e ridurre il costo computazionale durante la risoluzione dei sistemi lineari, soprattutto con solutori diretti. Ad esempio, una matrice tridiagonale ha banda l = u = 1, quindi la larghezza della banda è 1 + 1 + 1 = 3. Per noi la banda di una matrice ci dirà quanto sono legati tra loro i GdL. In particolare, nel caso di una matrice [K] diagonale, i GdL dipendono univocamente da loro stessi. Se si ha una struttura con una fitta rete di connessioni, sarà molto più difficile avere una banda ristretta.

Prima abbiamo scritto che il solutore è chiamato a risolvere un problema del tipo  $\vec{F} = [K]\vec{x}$ , questo corrisponde a risolvere il problema utilizzando il metodo degli spostamenti, a differenza di quanto si faceva a mano nella scienza delle costruzioni in cui si prediligeva il metodo delle forze in cui si può scrivere:  $\vec{x} = [C]\vec{F}$  dove [C]è la matrice di flessibilità. Generalmente per risolvere i sistemi carta e penna si utilizza il metodo delle forze in quanto il numero di equazioni risolutive diminuisce, tuttavia si hanno importanti benefici nell'usare il metodo degli spostamenti in ambito FEM. Il nostro primo problema è quello di stabilire le singole componenti delle due matrici [K] e [C]. I coefficienti delle matrici si possono trovare nella seguente maniera:

- $K_{ij} = \frac{F_i}{x_j}$ : Forza misurata nel GdL *i* quando alla struttura viene imposto il solo spostamento unitario nel GdL *j* (tutti altri nulli);
- $C_{ij} = \frac{x_i}{F_j}$ : Spostamento misurato nel GdL *i* quando alla struttura viene imposto la sola forza unitaria nel GdL *j* (tutte altre nulle).

Se il sistema è lineare le matrici sono simmetriche. Non si può dire che per trovare  $C_{ij}$  basti fare il reciproco di  $K_{ij}$ , ma bisogna invertire tutta la matrice. Basti pensare infatti che esiste una rigidità tra 2 nodi  $i \in j$  solo se esiste un elemento che li collega, non si può dire lo stesso sulla flessibilità  $K_{ij}$ . In generale [K]è una caratteristica della mappatura, mentre [C] tiene conto del comportamento dell'intera struttura. La matrice di rigidezza per una matrice labile la si può scrivere, ma non si può scrivere la matrice di flessibilità. La matrice [K] è una matrice definita positiva, ovvero la forma quadratica è sempre maggiore uguale a zero. Questo comporta che la matrice K può avere solo termini positivi sulla diagonale. Una rigidezza negativa fuori dalla diagonale è possibile per mantenere l'equilibrio nella struttura. Nei metodi FEM si utilizza sempre il metodo degli spostamenti in quanto fornisce sempre dei sistemi completi.

Negli elementi finiti possiamo dire che tutto viene discretizzato ai nodi di cui si vogliono conoscere gli spostamenti. In caso di carichi distribuiti o carichi di volume (come ad esempio forze peso o forze d'inerzia) si discretizza il carico ripartendolo solo ai nodi in modo tale da rispettare l'equilibrio e la congruenza. Questo passaggio tuttavia comporta un errore nel determinare il campo di spostamenti interno all'elemento. Lo stesso lo si fa per i carichi termici che vengono trattati come forze auto-equilibrate interne per rispettare ancora una volta equilibrio e congruenza. Bisogna precisare che il carico termico non è un *carico* propriamente detto, ma sono delle dilatazioni. In ambito FEM si trattano come se fossero dei carichi, ma poi lo strain termico si sottrae dalle  $\sigma$  nella seguente maniera:  $\sigma = E (\varepsilon_{\text{Tot}} - \varepsilon_{\text{Termico}}).$ Per questo motivo lì, dove si hanno dei carichi distribuiti si preferisce avere un infittimento della mesh maggiore. Si possono trovare le matrici di rigidezza per ogni tipologia di elemento, ad esempio per una trave nello spazio si ha una matrice di rigidezza 12x12 in quanto si hanno 6 GdL per nodo. Una volta scritte le matrici di rigidezza per ogni elemento nel proprio sistema locale si può assemblare la matrice di rigidezza complessiva della struttura ruotando le singole matrici di rigidezza rispetto al sistema di riferimento globale, in seguito si introduce il sistema di enumerazione che ci permette di minimizzare la banda e infine si ottiene la matrice globale nella seguente maniera:

$$\left[\mathbf{K}\right] = \sum_{i=1}^{\text{n.elementi}} \left[\mathbf{K}_{g}^{i}\right]_{\text{Num glob}}$$

Il passo successivo è quello di stabilire come gestire i vincoli nell'analisi FEM. I vincoli rappresentano le condizioni imposte alla struttura per limitare alcuni gradi di libertà, in modo da simulare l'effetto di appoggi, incastri, cerniere o altri dispositivi meccanici. In genere, i vincoli si dividono in:

- Vincoli essenziali: specificano il valore di uno o più spostamenti. Ad esempio, l'imposizione di spostamento nullo in un nodo (incastro) o lo scorrimento lungo una direzione;
- Vincoli naturali: specificano il valore di forze o tensioni applicate. Sono inclusi nel termine noto del sistema.

Nel sistema lineare risultante dall'analisi FEM:  $\vec{F} = [K]\vec{x}$  l'introduzione dei vincoli di spostamento avviene tramite tre metodologie principali:

- Modifica diretta del sistema: si impongono gli spostamenti noti nel vettore  $\mathbf{u}$  e si modificano la matrice [K] e il vettore  $\mathbf{F}$  annullando le righe/colonne corrispondenti e ponendo 1 sulla diagonale, sostituendo il valore di carico;M
- Metodo della penalizzazione: si introduce un valore molto grande sulla diagonale della matrice **K** per forzare uno spostamento quasi nullo in un determinato GdL. Si utilizza nel caso di contatti, nella fase di *detection* quando si osserva una compenetrazione si applicano delle forze che la impediscono passando per delle rigidezze fittizie. Le reazioni ricavanti alla fine si ripartiscono sempre sui nodi;
- Metodo dei moltiplicatori di Lagrange: si aggiungono variabili ausiliarie ( $\lambda$ ) al sistema per far rispettare i vincoli come condizioni di vincolo esterne.

Generalmente in un modello FEM si hanno sempre delle strutture iperstatiche in quanto raramente si ha la necessità si mettere ad esempio un incastro in un solo nodo. Una struttura labile si traduce in una matrice [K] singolare.

Ricavare la matrice di rigidezza per una trave nello spazio è possibile in quanto si conosce la soluzione analitica del problema. Per determinare la matrice di rigidezza per un qualsiasi altro elemento, purché si possa associare un'equazione differenziale di equilibrio al suo interno, si può usare il principio dei lavori virtuali. In generale il modus operandi per risolvere un EF passa per questi punti:

- 1. Identificare e descrivere l'elemento.
- 2. Scegliere un'opportuna funzione che approssimi il campo degli spostamenti di ogni punto dell'elemento.
- 3. Legare il campo degli spostamenti dell'elemento agli spostamenti nodali, ossia trovare le funzioni di forma.
- 4. Scrivere le relazioni per i campi di spostamento e deformazione, per ogni punto dell'elemento;
- 5. Scrivere le relazioni per i campi di tensione in funzione di quelli per le deformazioni;
- 6. Ricavare la matrice di rigidezza dell'elemento (relazione carichi-spostamenti nodali attraverso principio dei lavori virtuali o altro principio variazionale);

7. Infine si devono scrivere le relazioni tra il campo delle tensioni dell'elemento e gli spostamenti nodali. Questo passaggio viene fatto per ricavare la mappa delle tensioni (*contour plot*) oppure in calcolo non lineare per conoscere le tensioni forze interne che poi andranno confrontate con quelle esterne per sapere se si è arrivati a convergenza.

Così facendo si può studiare anche l'elemento solido a quattro nodi *tetraedro* avente solo 3 GdL per nodo. Questi elementi hanno il grande vantaggio che si può fare la mesh di qualsiasi geometria, anche la più complessa, con dei tetraedri, lo stesso non si può dire con altri elementi solidi come i *brick*. Nell'analisi delle biella verranno usati proprio dei tetraedri.

Si ritiene opportuno introdurre brevemente gli elementi isoparametrici che da Ansys 17 in poi hanno sostituito tutti gli altri elementi, anche la *beam* in quanto la *beam* isoparametrica permette di calcolare in modo più agevole il campo plastico. Gli elementi isoparametrici vengono chiamati in questo modo in quanto la stessa funzione di forma viene utilizzata sia per la geometria dell'elemento che per il campo delle variabili (ad esempio, gli spostamenti). Le funzioni di forma sono definite in un sistema di coordinate naturali (in 2D r ed s).

L'idea fondamentale è quella di mappare l'elemento in un sistema di riferimento naturale e standard nel senso che le coordinate dell'elemento in esame, nel suo sistema di riferimento naturale, sono indipendenti dalla forma e dall'estensione dell'elemento stesso. Si ha una correlazione biunivoca tra un punto in un sistema di riferimento naturale e quello standard. Come contro si avrà il fatto che non è più impossibile fare un'integrazione analitica, ma va fatta un'integrazione numerica che aumenta l'errore nel calcolo. Aumentare il numero in cui si fa l'integrazione aumenta chiaramente la precisione del calcolo, ma aumentano significativamente i tempi di calcolo. Si possono scegliere dei punti particolarmente significativi detti *punti di Gauss* che ci permettono a parità di precisione di diminuire i punti di integrazione. Per una buona precisione del calcolo sarà importante avere degli elementi isoparametrici il quanto più simili possibile con gli elementi di riferimento. Con questi elementi si possono modellare anche delle geometrie curvilinee altrimenti impossibili da modellare.

Per gli elementi isoparametrici ci sta un altro aspetto da considerare: lo Ja-cobiano. La matrice Jacobiana rappresenta la derivata della trasformazione che mappa il dominio naturale (es. r, s) sul dominio fisico (es. x, y). In coordinate naturali, l'elemento di area si calcola come:

$$dA = |\vec{r} \times \vec{s}| \, dr \, ds$$

dove i due versori possono essere espressi nelle coordinate fisiche come:  $\vec{r} = \frac{d\vec{x}}{dr}\vec{i} + \frac{d\vec{y}}{dr}\vec{j}$  e  $\vec{s} = \frac{d\vec{x}}{ds}\vec{i} + \frac{d\vec{y}}{ds}\vec{j}$ .

Il prodotto vettoriale tra  $\vec{r} \in \vec{s}$ , che fornisce l'area differenziale in 2D, è:

$$\vec{r} \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dy}{dr} \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \end{vmatrix} \vec{k}$$

Questa matrice viene detta *Jacobiano* e si può scrivere l'analogo per il caso 3D. Per gli elementi di volume si può scrivere che:

$$dV = \det(\mathbf{J}) \, dr \, ds \, dt$$

Il determinante dello Jacobiano ha un ruolo fondamentale in FEM:

- se  $det(\mathbf{J}) > 0$  l'elemento è valido e ben orientato;
- se  $det(\mathbf{J}) = 0$  l'elemento è degenerato;
- se  $det(\mathbf{J}) < 0$  l'elemento è invertito (non fisicamente accettabile).

Inoltre, lo *Jacobiano* fornisce un'importante proprietà: la mappatura è biunivoca se esistono sia  $\mathbf{J}$  che  $\mathbf{J}^{-1}$ , ovvero se la trasformazione è localmente invertibile in ogni punto.

A fini di completezza, si segnala che esistono anche gli elementi sub-parametrici (in cui la geometria è interpolata con funzioni di ordine inferiore rispetto al campo fisico) e gli elementi super-parametrici(ordine superiore per la geometria). Tuttavia, gli elementi isoparametrici rappresentano il miglior compromesso tra accuratezza, efficienza e facilità di implementazione.

In genere un'analisi FEM si compone di tre fasi: pre processing, solution e post processing. La fase di pre processing comprende:

- La definizione della geometria del dominio da analizzare;
- La creazione della mesh in modo tale da ottenere dei risultati affidabili in tempi di calcolo ragionevoli;

- L'assegnazione delle proprietà dei materiali (modulo di Young, coefficiente di Poisson, densità, ecc.);
- L'applicazione delle condizioni al contorno (vincoli) e dei carichi esterni che meglio approssimano il comportamento reale.

Il modello CAD da utilizzare nell'analisi FEM non deve essere necessariamente il modello della geometria effettiva della struttura, anzi talvolta può portare a degli errori. Ad esempio, se si deve studiare una lunga conduttura in pressione, si potrebbe pensare di utilizzare degli elementi *brick*, ma solo un elemento nello spessore non permette di studiare il comportamento flessionale della struttura; servono per una buona accuratezza almeno tre elementi nello spessore. Questo comporterebbe dei tempi di calcolo molto maggiori. Una buona soluzione invece potrebbe essere quella di usare degli elementi *shell*, ovvero elementi di superficie da posizionare a metà dello spessore del tubo. Quindi da un modello reale 3D si è passati ad un modello per utilizzo FEM 2D.

Nella fase di solution il software FEM risolve il sistema di equazioni derivato dall'assemblaggio degli elementi. Come già detto, l'obiettivo è ottenere gli spostamenti nodali. A partire da questi, si calcolano tutte le grandezze derivate: deformazioni, tensioni, pressioni, ecc.

L'ultima fase (Post processing) consiste nell'analisi e nella visualizzazione dei risultati. Tipicamente include:

- La rappresentazione grafica dei campi (ad esempio mappe delle tensioni, deformazioni o spostamenti).
- L'estrazione di valori nei punti critici.
- La verifica della correttezza fisica e numerica della soluzione, in questa fase è indispensabile l'occhio esperto dell'ingegnere ad esempio per distinguere degli errori numerici.

#### 3.3 Condizione di carico più gravosa

Per approcciare lo studio della biella *baseline*, il primo passaggio è quello di identificare la condizione di carico più gravosa per la biella. Per fare ciò, si è dovuto scegliere tra una delle 19 configurazioni in cui una componente di carico raggiunge un estremo, in particolare un massimo. Si sono fatte rigirare queste configurazioni sul modello *Workbench* fornito, su cui è stato fatto solamente un lieve infittimento della mesh. Si è trovato che le tensioni massime si hanno nella configurazione corrispondente a massima coppia trasmessa (6500 RPM) quando si raggiunge il massimo della pressione in camera di combustione. La mesh del modello fornito la si può osservare in Figura 3.1.



Figura 3.1: Mesh in modello WB fornito

Si può osservare che si tratta di una mesh con maglia molto grossa, composta da elementi tetraedrici sulla biella e *brick* sulla bronzina. La bronzina è scomponibile e il contatto è stato modellato come *frictional*, con un piccolo coefficiente di attrito (0,16) per tutte e tre le zone di contatto: bronzina-bronzina e sede bronzina, per entrambe le semimetà del cuscinetto. Le semimetà della bronzina vengono chiamate *gusci*. Per i due contatti bronzina-sede si è inserito un *offset* di 0,03 mm, al fine di considerare il meato di fluido necessario per il corretto funzionamento del cuscinetto a strisciamento. Per la presenza di contatto, si parla di analisi non lineari nel nostro caso.

La grandezza media degli elementi è stata lasciata pari al valore di default suggerito da Ansys Mechanical<sup>®</sup>, mentre si è effettuato un infittimento solo sul raccordo (*Face Sizing* di 0,2 mm), che rappresenta la regione critica della biella. Eseguendo l'analisi in questa configurazione, si osservano dei massimi numerici in corrispondenza dell'accoppiamento tra le semimetà della bronzina, che tuttavia possono essere tranquillamente ignorati.

In particolare, questi massimi numerici sono trascurabili poiché, come noto, il solutore calcola gli spostamenti nodali: piccoli errori numerici in questi spostamenti, localizzati in un punto, possono generare elevate  $\sigma$  una volta che si derivano i campi. In generale, va ricordato che le integrazioni tendono ad attenuare gli

errori, mentre le derivazioni li amplificano. Per questo motivo, non si riscontrano problemi nelle zone lontane dal massimo numerico. Nelle aree immediatamente vicine alla singolarità numerica, è possibile che si generi una zona di rilassamento del materiale.

Poiché l'oggetto della nostra analisi è la biella e non la bronzina, possiamo trascurare tali singolarità numeriche. Nel modello fornito, era stato deciso di infittire unicamente la zona critica, accettando risultati più approssimati nelle restanti porzioni della biella, in quanto tutto ciò che circonda la zona critica serve unicamente a trasmettere correttamente i carichi al raccordo, cioè rappresenta una condizione al contorno.

Nella nostra analisi, invece, volendo ottenere una precisione maggiore anche nelle zone distanti dal raccordo, si è scelto di infittire maggiormente la mesh. Tale infittimento diventerà sempre maggiore nelle analisi successive per necessità di maggiore accuratezza. In particolare, oltre al *Face Sizing* sulla reazione critica, si è usato un *Body Sizing* sui due gusci della bronzina.

Come già detto, in queste simulazioni vengono applicate anche le accelerazioni inerziali e le velocità angolari, in modo da garantire l'equilibrio dinamico del sistema. Eventuali piccoli squilibri numerici vengono corretti sospendendo virtualmente la biella con molle deboli, tuttavia va verificato che la reazione di queste molle sia di piccola entità. I carichi sull'occhio grande e sull'occhio piccolo della biella vengono presi da un file esterno e letti da un codice *command APDL*. Questo codice risulta essere necessario per l'applicazione dei carichi all'occhio grande in quanto *Mechanical* non permette di inserire il carico da cuscinetto (*bearing load*) su superfici appartenenti a due corpi distinti. Inoltre, in questo modo si riesce a gestire meglio il profilo di distribuzione di pressioni, la cui risultante in modulo e verso deve essere pari al vettore di reazione vincolare  $\vec{R_b}$ . Il command APDL fornito dall'azienda distribuisce il profilo di pressioni in un certo range attorno alla direzione del vettore  $\vec{R_b}$ .

La mesh e i *risultati* per la sola biella calcolati per la condizione di carico più gravosa si possono osservare in Figura 3.2.



Figura 3.2: Risultati condizione di carico più gravosa

Come ci si aspettava, il massimo si trova sul raccordo. Il raccordo risulta essere necessario per la corretta lubrificazione della bronzina. Facendo girare le 6 analisi per il regime di rotazione a 6500 RPM, si ottengono i seguenti risultati in Tabella 3.1.

Tempo [s]	Min [MPa]	Max [MPa]	Media [MPa]
1	0.44359	283.81	96.143
2	3.0438	526.95	160.56
3	2.668	474.46	145.4
4	0.77487	322.18	104.75
5	0.37221	284.01	95.502
6	1.6289	244.59	108.35

Tabella 3.1: Risultati strutturali per 6500 RPM

Chiaramente, essendo delle analisi statiche, la variabile temporale non ha alcun senso fisico. Nella stessa maniera per 8000 e 10600 RPM si possono ottenere le Tabelle 3.2 e 3.3.

Confrontando questi risultati, si è confermato, come già accennato in precedenza, che la condizione di carico più gravosa si verifica in corrispondenza del picco

Tempo [s]	Min [MPa]	Max [MPa]	Media [MPa]
1	0.69916	304.05	101.24
2	0.54524	297.66	99.15
3	2.3323	277.97	119.33
4	2.7423	493.81	151.08
5	2.0878	441.8	136.29
6	0.89195	334.67	108.12

Tabella 3.2: Risultati strutturali per 8000 RPM

Tempo [s]	Min [MPa]	Max [MPa]	Media [MPa]
1	1.2264	367.02	118.91
2	0.88128	343.68	111.43
3	0.70289	331.15	107.12
4	1.6116	368.17	147.25
5	1.8036	415.3	130.34
6	0.98166	354.47	114.89
7	1.142	360.58	116.95

Tabella 3.3: Risultati strutturali per 10600 RPM

di pressione a 6500 RPM, dove si registra una tensione massima sul raccordo di 526.95MPa. In tale condizione, sulla base del codice cinematico, si è determinato che si ha  $\alpha = 344.752^{\circ}$  e un angolo di biella pari a  $\theta = 4.51^{\circ}$ . Per comprendere più a fondo le reazioni vincolari agenti in questo stato di carico, si rimanda alla Figura 3.3.



Figura 3.3: Reazioni corrispondenti a condizione di carico più gravosa

# 3.4 Verifica strutturale della configurazione di base (*Baseline*)

Una volta ottenuta la condizione di carico più gravosa, che coincide con la condizione di carico che erode di più la vita a fatica della biella, il passo successivo consiste nella costruzione di un modello *Mechanical* ex novo. Tale modello include esclusivamente la velocità e l'accelerazione angolare della biella, l'accelerazione lineare del suo baricentro, nonché le reazioni vincolari all'occhio grande e all'occhio piccolo, tutte riferite alla configurazione critica identificata.

Seguendo quello che è stato detto nel Paragrafo 3.2, il primo passaggio per un'analisi strutturale è il pre processing, che inizia dalla preparazione del modello CAD. Su tale modello si fanno una serie di tagli usando *Ansys SpaceClaim* sulla superficie in modo da rendere possibile una comoda selezione delle superfici stesse in delle *Named Selection*. Le *Named Selection* in *Mechanical* sono strumenti che permettono di raggruppare insiemi di entità geometriche o meshate: come nodi, superfici, EF, spigoli o volumi, purché appartenenti alla stessa categoria. Questi raggruppamenti, coerenti per natura (ad esempio: solo nodi, solo facce, solo corpi), sono utili per assegnare condizioni al contorno, ai carichi, vincoli o semplicemente per facilitare la navigazione e la gestione del modello all'interno del pre processing. Il passo successivo è quello di generare delle *Virtual Topology*. Questo strumento consente di semplificare la geometria per la generazione della mesh, senza modificarne il CAD originale. Essa permette di unire entità geometriche adiacenti (come spigoli o superfici) in entità virtuali, ignorando piccoli dettagli o discontinuità che possono compromettere la qualità della mesh. In questo modo si ricavano delle mesh con grandezza degli elementi regolari che consentono di ottenere risultati stabili e computazionalmente efficienti. Dopo aver creato le *Virtual Topology* il modello si presenta come in Figura 3.4



Figura 3.4: Virtual Topology su biella

Ora andremo a trattare l'assegnazione delle proprietà del materiale utilizzato. La biella è fatta in acciaio 42CrMo4, si tratta di un acciaio legato al cromomolibdeno con ottime proprietà meccaniche ampiamente utilizzato in ambito automobilistico. Su di questo è stato fatto un processo di bonifica. La bonifica è un trattamento termico che viene eseguito sui materiali metallici al fine di innalzarne le proprietà meccaniche quali: resistenza, durezza e tenacità. Questo processo si compone di due sottofasi: una tempra e un processo di rinvenimento dove il materiale viene scaldato a temperature più basse rispetto a quelle necessarie per la tempra, seguito da un lento raffreddamento. In particolare possiamo dire che l'innalzamento delle proprietà meccaniche in seguito alla bonifica dipende dalle dimensioni del semilavorato di partenza (nel nostro caso un barrotto, ovvero un semilavorato di forma cilindrica). In *Piaggio* viene considerata la Tabella 3.4 relativa all'acciaio in questione per valutare gli effetti della bonifica:

Spessore o Ø barrotto (mm)	$Rm [N/mm^2]$	${ m Re} [{ m N/mm^2}]$	A [%]
$\leq 16$	1100-1300	$\geq 900$	$\geq 10$
> 16 - 40	1000 - 1200	$\geq 750$	$\geq 11$
> 40 - 100	900 - 1100	$\geq 550$	$\geq 12$

Tabella 3.4: Caratteristiche del 42CrMo4 bonificato in funzione del diametro del barrotto

Dove  $R_m$  è la tensione a rottura,  $R_e$  è la tensione di snervamento e A è l'allungamento percentuale a rottura. Nel nostro caso, dato che l'ingombro massimo sul piano del moto del manovellismo per la biella è di 45 mm, ricadiamo nel terzo intervallo dimensionale.

La biella, inoltre, subisce un processo di *pallinatura* finalizzato ad aumentare la durezza superficiale, con conseguente miglioramento della resistenza a fatica. Durante tale trattamento si generano deformazioni plastiche controllate sulla superficie del componente tramite la proiezione ad alta velocità di piccole sfere metalliche o ceramiche.

Per questo processo, l'azienda stima un incremento della vita a fatica compreso tra un minimo del 10% e un massimo del 40%, in funzione della finitura superficiale iniziale della biella. In particolare, per una biella con finitura molto elevata, l'aumento della resistenza a fatica sarà minore (circa 10-15%). Questo perché è noto che, quanto più elevata è la qualità superficiale di un componente, tanto più difficilmente si formano microcricche in superficie, riducendo così i potenziali punti di innesco per la propagazione a fatica.

Considerati tutti questi fattori, e consultata la fonte [15], si è deciso di considerare per l'acciaio in esame i seguenti valori:

- Densità:  $7850 \text{ kg/m}^3$
- Modulo di Young: 210 GPa
- Carico di rottura a trazione (UTS): 1000 MPa
- Carico di snervamento: 650 MPa

Essendo un materiale a comportamento prettamente duttile, si è considerato il carico di rottura a trazione uguale a quello di compressione. Come criterio per trovare la  $\sigma$  equivalente che porta in crisi il materiale si è usato il criterio di Von Mises che considera l'energia di distorsione. In WB si sono impostati come output i Von Mises su tutta la biella comprensiva di bronzina, solo il corpo della biella, solo il raccordo e sulla regione immediatamente sottostante l'occhio piccolo sullo stelo. Da disegno tecnico è prescritta una UTS di 980 MPa, limite inferiore in questo caso soddisfatto.

A questo punto, applicati i carichi sui due cuscinetti tramite carichi esterni e generato il campo di forze d'inerzia, inserendo la cinematica della biella, l'ultimo passaggio del pre processing è la generazione della mesh mediante analisi di convergenza. L'analisi di convergenza della mesh è una procedura mediante la quale si verifica la stabilità e l'affidabilità dei risultati ottenuti con il metodo degli elementi finiti. Essa consiste nel ripetere la stessa analisi strutturale utilizzando mesh progressivamente più raffinate, al fine di osservare se le grandezze di interesse tendono a convergere verso un valore stabile senza dover utilizzare delle mesh molto più fitte del necessario, andando ad infittire solo lì dove necessario, ad esempio per zone con geometrie complesse, zone in cui vengono applicati i carichi distribuiti e zone dove si hanno contatti. In generale, un modello in cui agiscono solo carichi concentrati necessiterà di una mesh meno fitta rispetto a un modello avente dei carichi distribuiti, come forza peso o forze d'inerzia, questo per i motivi di discretizzazione dei carichi ai nodi visti nel Paragrafo 3.2. Una soluzione si considera convergente quando, al diminuire della dimensione degli elementi, i risultati ottenuti variano in maniera trascurabile. La convergenza si è ottenuta con i seguenti parametri:

- Dimensione media degli elementi pari a 2mm;
- Face Sizing su raccordo pari a 0.2mm (immutato rispetto al modello fornito);
- Face Sizing su sede bronzina pari a 0.7mm;
- *Inflation* su sede bronzina con numero di *layer* massimo pari a 6 e tasso di crescita pari a 1.2;
- Face Sizing su superficie compresa tra raccordo e occhio grande pari a 0.5mm
- Body Sizing su bronzina di 0,5mm

Il comando *Sizing* consente di aumentare solo localmente in modo omogeneo l'infittimento della mesh su una superficie (*Face Sizing*) o in un volume (*Body Sizing*). Il comando *Inflation* è una funzionalità di meshing utilizzata per generare strati di elementi sottili e allungati in prossimità di superfici, con lo scopo di catturare correttamente forti gradienti di variabili fisiche come velocità, temperatura o tensioni. Questi elementi sono disposti in modo progressivo, aumentando di spessore con la distanza dalla parete, secondo parametri come numero di *layer*, spessore iniziale e tasso di crescita. Questo comando risulta essere utile per evitare massimi numerici al di sotto della superficie della bronzina. In questo modo, i risultati ottenuti sono presentati nelle Figure 3.5 e 3.6.



Figura 3.5: Risultati ottenuti dopo convergenza della mesh



Figura 3.6: Risultati ottenuti dopo convergenza della mesh in sezione

Anche in questo caso, come ci aspettavamo, il massimo continua a trovarsi sul raccordo. Altre zone critiche per la biella sono: superfici interne di occhio grande e piccolo e regione sullo stelo immediatamente sotto l'occhio piccolo. I risultati sono molto simili a quelli precedentemente trovati (516MPa contro i 526MPa precedenti) che sono risultati ragionevoli considerando il materiale di cui è fatta la biella. Durante il funzionamento del motore, infatti, è importante rimanere sempre al di sotto della tensione di snervamento (nel nostro caso 650MPa) in quanto non si vogliono avere deformazioni permanenti del materiale che potrebbero condizionare il corretto funzionamento del motore andandone ad alterare la cinematica e la dinamica. Considerazioni riguardanti la vita a fatica invece potrebbero essere fatte in sviluppi futuri del lavoro.

# 4 Ottimizzazione

# 4.1 Principi di ottimizzazione numerica

In questo paragrafo ci occuperemo dei vari tipi di ottimizzazione utilizzati in ambito ingegneristico, con particolare attenzione all'aspetto strutturale. In termini generali, per ottimizzazione si intende il raggiungimento del risultato più vantaggioso possibile con i vincoli e i dati disponibili, in relazione a un determinato obiettivo. Per ottimizzare un processo o un prodotto esistono diverse metodologie, ad esempio il metodo *trial and error*, che però potrebbe portare a costi di sviluppo e tempi prolungati. Il nostro obiettivo è utilizzare metodi sistematici per arrivare a una configurazione ottimizzata.

Tre elementi chiave per un'ottimizzazione sono:

- Parametri: sono le variabili del nostro sistema (possono essere quote geometriche, densità, materiali). Il primo passo è stabilire lo spazio entro il quale questi parametri possono variare. Si parla di dominio dei parametri di n dimensionale dove n è il numero dei parametri).
- Obiettivi: un'ottimizzazione deve perseguire uno o più obiettivi (ad esempio massa, rigidezza, tensioni massime, ecc.). Se si impostano più obiettivi contemporaneamente, si parla di *ottimizzazione multi-obiettivo*.
- Vincoli: qualsiasi condizione da soddisfare durante l'ottimizzazione (ad esempio limiti di tensione, spostamento o ingombro massimo).

Una configurazione ottimizzata può essere vista come il set di parametri che minimizza una funzione detta *funzione obiettivo*,  $\psi(x)$ , dove x è il vettore delle variabili di progetto. Anche i vincoli si possono esprimere come funzioni, in particolare  $g(x) \leq 0$ . Introdurre la teoria dei moltiplicatori di Lagrange permette di trasformare un problema vincolato in uno non vincolato, in cui i moltiplicatori sono le incognite. Solo in casi semplici (ad esempio teoria della trave o dei gusci) si riesce a scrivere esplicitamente la funzione obiettivo. Nella pratica, le funzioni da ottimizzare derivano spesso da analisi computazionalmente onerose: per questo vengono dette *funzioni costose*, ad esempio quelle in ambito FEM.

Tra i principali approcci per risolvere problemi di ottimizzazione strutturale troviamo:

- Metodi basati sulla superficie di risposta
- Metodi basati sul gradiente
- Metodi metaeuristici
- Metodi basati su intelligenza artificiale

La metodologia che verrà approfondita è la prima, ovvero il metodo basato su superfici di risposta, noto anche come *Response Surface Methodology* (RSM). Il *Design Point* è una combinazione specifica di parametri per cui viene calcolata la risposta del sistema. Gli approcci RSM si basano su un *Design of Experiments* (DoE) e sulla generazione di una superficie di risposta: una funzione che approssima la relazione tra variabili di input e output.

Nel caso di ottimizzazione multi-obiettivo, si può ricorrere a un trade-off tramite una funzione composita oppure tramite il metodo di Pareto. In queste ottimizzazioni non esiste un ottimo globale, ma una frontiera di Pareto, dove ciascun punto rappresenta una soluzione in cui migliorare un obiettivo implica peggiorarne un altro. I punti sulla frontiera di Pareto si dicono non dominati; quelli al di fuori possono essere sostituiti da un Design Point migliore in almeno una prestazione.

Il DoE consente di ottenere il massimo dell'informazione con il minimo numero di test, grazie ad algoritmi che scelgono opportunamente i punti da analizzare nel dominio dei parametri. Metodi come il *Full Factorial*, che esplorano lo spazio in modo equispaziato, risultano raramente efficienti. Le superfici di risposta possono essere rappresentate tramite polinomi, *Radial Basis Functions* (RBF) o tecniche di *machine learning* (come le reti neurali). In particolare, con RBF lineari si può imporre che la superficie passi per i *Design Point*, oppure adottare una strategia di regressione. La strategia in regressione significa imporre che lo scarto quadratico dell'errore sul passaggio dei punti si minimizzi. Un metamodello (o surrogate model) è un modello matematico che associa a un set di n parametri un vettore di m output. In pratica: n è il numero di parametri e m il numero di obiettivi.

In genere, nelle ottimizzazioni non si utilizza tutta la potenza di calcolo in un'unica campagna, ma si inizia con una pre-analisi per costruire una prima superficie di risposta. Da qui si individuano i parametri più influenti, e si esegue una seconda campagna mirata, migliorando la qualità del metamodello, in particolare il *fit* della *Response Surface*.

Tra i principali algoritmi di *sampling* per il DoE troviamo:

- Central Composite Design
- Optimal Space-Filling Design
- Sparse Grid Initialization
- Latin Hypercube Sampling Design (LHS)

Il Latin Hypercube Sampling è basato sul metodo Monte Carlo, ma ne migliora l'efficienza. A differenza del campionamento casuale semplice, che può produrre raggruppamenti o aree trascurate, il LHS garantisce che ogni intervallo di ogni variabile sia campionato esattamente una volta. Questo assicura una copertura omogenea dello spazio anche con pochi punti. A priori, si stabilisce il numero di punti da generare e il dominio dei parametri.

Supponiamo di avere n variabili di input e di voler generare N Design Point. Ogni variabile è divisa in N sotto-intervalli equiprobabili. Si seleziona un valore casuale da ciascun intervallo (senza ripetizioni), e si combinano questi valori tra loro in modo da usare ogni sotto-intervallo una sola volta per variabile. Questo garantisce una copertura uniforme dello spazio.

I principali vantaggi del LHS sono:

- Copertura omogenea dello spazio dei parametri
- Maggiore efficienza rispetto al campionamento casuale
- Scalabilità con l'aumento delle variabili
- Riduzione del numero di simulazioni necessarie in problemi costosi

Un limite dei metodi basati su superficie di risposta è che, con l'aumentare del numero di parametri e output, diventa più difficile trovare un buon *tradeoff*. Inoltre, trattandosi di modelli interpolanti, non sempre hanno corrispondenza fisica, e l'entità dell'approssimazione non è nota. Quando si identificano dei *Candidate Point* (CP) ottimali tramite la superficie di risposta, è buona norma rieseguire l'analisi FEM completa per validare il risultato, poiché esso deriva da un'approssimazione.

Una delle principali tipologie di ottimizzazione è l'ottimizzazione topologica. Questa consente di determinare la miglior distribuzione del materiale all'interno di un dominio strutturale predefinito che fornisce una rigidezza ottimale. Il modello iniziale viene discretizzato in una mesh uniforme e, tramite metodi iterativi (come SIMP - *Solid Isotropic Material with Penalization*), si eliminano progressivamente le porzioni di materiale non significative per la rigidezza strutturale. Questo metodo va a modificare la topologia della mesh potendo creare anche dei buchi, ovvero variandone la sua connettività. Come vincoli generalmente si utilizza il volume. È utile nelle fasi iniziali del design e può condurre a forme non convenzionali, ottime in termini di rapporto massa/rigidezza ma che si prestano dal punto di vista manifatturiero specialmente all'*additive manufacturing*. Altri tipi di ottimizzazioni sono: ottimizzazioni di forma, genetiche ecc...

La parametrizzazione della forma può essere effettuata direttamente nel CAD, cioè prima del processo di *meshing*, oppure sulla mesh stessa, detto in questo caso *mesh morphing*. Entrambi gli approcci presentano vantaggi e svantaggi. La parametrizzazione a livello CAD garantisce una migliore qualità della mesh, evitandone distorsioni. Al contrario, la parametrizzazione sulla mesh comporta un minore onere computazionale, poiché evita la necessità di eseguire il remeshing, eliminando così anche il rumore da *remeshing*. Inoltre, questa seconda strategia si presta particolarmente bene alla creazione di modelli ridotti e all'impiego di metodi come il BGM (*Biological Growth Method*), poiché la topologia della mesh rimane invariata. Nell'ambito CAE il *mesh morphing* si va a posizionare tra la creazione della mesh e la parte solutin. Le tre principali tecniche che vengono usate per fare *mesh morphing* sono: utilizzo dell *Boundary Displacement Method*, *Free-Form Deformation* e infine l'utilizzo delle *Radial Basis Funcions*. Nel paragrafo 3.2 si andranno ad approfondire le RBF.

# 4.2 Funzioni a base radiale (RBF)

Le *Radial Basis Functions* (RBF) rappresentano strumenti matematici ampiamente impiegati nel contesto del *mesh morphing*. Questo approccio consente di deformare una mesh esistente agendo esclusivamente sulla posizione dei nodi, senza alterarne la topologia: il numero di elementi, la loro connettività e il tipo di celle rimangono invariati. L'interpolazione ottenuta tramite RBF è indipendente dalla presenza di carichi o vincoli strutturali, poiché si basa unicamente sulla geometria iniziale. Uno dei principali vantaggi offerti da tale metodologia risiede nella capacità di generare deformazioni fluide e regolari anche in presenza di geometrie complesse, mantenendo al contempo l'integrità della mesh.

Queste funzioni sono nate come strumento di interpolazione per dati sparsi, ovvero in input si ha una nuvola di punti. Le RBF permettono di interpolare, in qualsiasi punto dello spazio, una funzione definita da punti discreti (chiamati *source points*), restituendo il valore esatto nei punti noti. Il comportamento della funzione tra i punti dipende dal tipo di base adottata. La funzione interpolante è composta da una base radiale e da un polinomio, quest'ultimo serve a mantenere la compatibilità con i moti rigidi. La forma più generale delle RBF è la seguente:

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|) + h(\mathbf{x}), \qquad (4.1)$$

in cui N è il numero di *source points*. Si richiede che la funzione interpolante passi esattamente per i *source points*, condizione che si impone con le seguenti relazioni:

$$s(\mathbf{x}_{ki}) = g_i h(\mathbf{x}_{ki}) = 0 \qquad 1 \le i \le N,$$

in cui  $g_i$  è il valore imposto dei *source points*. Dal punto di vista computazionale il solutore sarà chiamato a risolvere un sistema lineare di ordine pari al numero di punti *punti sorgente* per ottenere i coefficienti  $\gamma_i$  della funzione e i coefficienti  $\beta_i$  del polinomio tali per cui si rispetta il passaggio per i punti noti. Dal punto di vista matriciale si può scrivere il seguente sistema lineare come:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P^{T}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}$$

In cui g è il vettore dei termini noti in corrispondenza dei *source points*,  $\gamma$  è il vettore dei coefficienti della funzione radiale e  $\beta$  è il vettore dei coefficienti del polinomio. La matrice **M** è la matrice di interpolazione, costruita calcolando le interazioni radiali tra i punti sorgente:

$$M_{ij} = \varphi(\|\mathbf{x}_{ki} - \mathbf{x}_{kj}\|), \quad 1 \le i, j \le N$$

La matrice  $\mathbf{P}$  è la matrice delle costanti che bilancia il contributo polinomiale e contiene una colonna di 1 e le coordinate x, y, z dei punti sorgente. Se il polinomio scelto è lineare ed in uno spazio 3D allora la matrice  $\mathbf{P}$  si può scrivere come:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & x_{k1} & y_{k1} & z_{k1} \\ 1 & x_{k2} & y_{k2} & z_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{kN} & y_{kN} & z_{kN} \end{pmatrix}$$

Il grado minimo del polinomio dipende dalla base radiale scelta. Una volta determinati i coefficienti incogniti, il movimento di un punto arbitrario, interno o esterno al dominio (interpolazione o estrapolazione), si esprime come somma dei contributi radiali di ciascun punto sorgente.

Un'unica funzione interpolante esiste se la funzione base è *condizionatamente* positiva definita. Se le basi sono positive definite con ordine  $m \leq 2$ , si può usare un polinomio lineare:

$$h(\mathbf{x}) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 z$$

Assumendo valide le ipotesi precedenti, una conseguenza dell'uso del polinomio lineare è che le traslazioni rigide vengono recuperate esattamente.

L'interpolazione con RBF è applicata a campi scalari. Per problemi di *smoothing*, ogni componente del campo di spostamento si interpola separatamente [11]:

$$\begin{cases} s_x(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \gamma_i^x \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ki}\|) + \beta_1^x + \beta_2^x x + \beta_3^x y + \beta_4^x z \\ s_y(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \gamma_i^y \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ki}\|) + \beta_1^y + \beta_2^y x + \beta_3^y y + \beta_4^y z \\ s_z(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \gamma_i^z \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ki}\|) + \beta_1^z + \beta_2^z x + \beta_3^z y + \beta_4^z z \end{cases}$$

Nella Figura 4.1 si può vedere un'applicazione delle RBF: si ha un quadrato su cui è stata creata una griglia di punti, si impone che i punti lungo il bordo del quadrato siano fissi e si impone uno spostamento a due punti interni, uno in alto e uno in basso: per un qualsiasi punto interno alla griglia, le RBF permettono di conoscerne la posizione e di mantenere il passaggio per i *source points*, ovvero i punti  $x_{ki}$ .



Figura 4.1: Valutazione grafica RBF

Le principali funzioni a base radiale sono elencate in tabella 4.1 [13].

Radial Basis Functions (RBF) con supporto globale		
Tipo	arphi(r)	
Spline (Rn)	$r^n$ , <i>n</i> dispari	
Spline a piastra sottile (TPSn)	$r^n \log(r), n$ pari	
Multiquadrica (MQ)	$\sqrt{1+r^2}$	
Multiquadrica inversa (IMQ)	$\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}$	
Quadratica inversa (IQ)	$\left  \begin{array}{c} rac{1}{1+r^2} \end{array} \right $	
Gaussiana (GS)	$e^{-r^2}$	

Tabella 4.1: Tipiche funzioni radiali $({\rm RBF})$  con supporto globale

# 4.3 Setup ottimizzazione

In questo paragrafo si analizza la metodologia sviluppata per ottimizzare la geometria della biella. L'ottimizzazione è stata condotta seguendo due direzioni principali:

- 1. Minimizzazione delle tensioni massime mantenendo il più possibile inalterati la massa della biella e la posizione del suo baricentro rispetto alla configurazione *baseline*.
- 2. Riduzione della massa cercando di non alterare significativamente la tensione di Von Mises massima ( $\sigma_{VM}$ ).

In un contesto di riprogettazione completa di un motore, è possibile intervenire in modo significativo sulla forma e sul volume della biella. Tuttavia, qualora l'obiettivo sia migliorare la vita a fatica di una biella montata su un motore già esistente, è preferibile adottare un'ottimizzazione meno invasiva, che non alteri in modo sensibile la dinamica del manovellismo.

Modificare massa, momento d'inerzia e posizione del baricentro della biella cambia il comportamento dinamico del manovellismo. Tali cambiamenti influenzano le reazioni meccaniche agenti sia sull'occhio grande sia sull'occhio piccolo. Inoltre, potrebbe rendersi necessaria la riprogettazione del volano e si potrebbero osservare variazioni nelle pressioni in camera di combustione. Tali modifiche non interessano esclusivamente la biella, ma si ripercuotono anche sul pistone, il quale richiederebbe a sua volta una rivalutazione strutturale. La riprogettazione del volano sarebbe indispensabile in quanto è un componente meccanico che permette di garantire la regolarità di funzionamento del motore. Esso serve ad accumulare energia cinetica durante le fasi attive (espansione) e a restituirla nelle fasi passive (aspirazione, compressione, scarico), contribuendo a mantenere uniforme la rotazione dell'albero motore.

Per realizzare questi obiettivi, si è deciso di parametrizzare direttamente la mesh utilizzando il software  $RBF \ Morph^{TM}$ , che sfrutta le funzioni a base radiale (RBF) per il mesh morphing. I parametri definiti possono essere gestiti numericamente tramite il Parameter Set di ANSYS Workbench.

Nel caso della biella, ai fini dell'ottimizzazione, si possono distinguere quattro zone principali:

• Stelo: parte centrale della biella, a sviluppo assiale. Si può assimilare a una trave avente sezione a doppio T;

- Occhio grande (*big eye*): zona attorno al bottone di manovella;
- Occhio piccolo (*small eye*): zona attorno al piede di biella;
- Raccordo: zona sottostante l'occhio grande che consente la corretta lubrificazione della bronzina.

Poiché il raccordo ha un ruolo importante nella dinamica del flusso lubrificante, si è deciso di modificarne la geometria in modo limitato, mantenendo invariata la profondità. In totale sono stati definiti 7 parametri indipendenti:

- 3 parametri relativi alla geometria del raccordo;
- 2 parametri che agiscono sullo stelo;
- 2 parametri che regolano lo spessore del materiale in corrispondenza dell'occhio grande e dell'occhio piccolo.

#### 4.3.1 Parametrizzazione della mesh

#### Parametrizzazione del raccordo

È stata creata una RBF Region comprendente l'intero corpo della biella. Successivamente sono state definite due RBF Source:

- Prima *RBF Source*: imposta i contorni fissi della biella. In particolare, sono state selezionate le superfici interne dell'occhio grande e dell'occhio piccolo, su cui è stata applicata una traslazione nulla lungo gli assi x, y, z.
- Seconda *RBF Source*: seleziona le 5 facce del raccordo da modificare. Su questa source sono state definite 4 *RBF Source figlie*, su cui sono stati impostati i seguenti parametri.

**P1 - RBF Source-edges-esterno superiore** Sulla superficie del raccordo parallela al piano del moto è stato generato un sistema di riferimento. È stato applicato uno *scaling* lungo l'asse ortogonale allo stelo e giacente sul piano del moto, selezionando i due bordi esterni del raccordo. Questo permette di regolare la larghezza del raccordo tramite il parametro P1.

**P2 - RBF Source-edges-internal** Similmente al caso precedente, è stato applicato uno *scaling* ai bordi interni del raccordo per regolare l'inclinazione delle superfici laterali. A questo è associato il parametro P2.

**P3 - RBF Source-edge-external-1-Curve Offset** Tra la zona piana del raccordo e una delle due zone inclinate si può osservare un piccolo raggio di raccordo. Sul suo bordo tangente superiore è stato applicato un *curve offset*, che consente di regolare il raggio di raccordo andando ad abbassare o alzare questo bordo lungo la superficie inclinata. Questo è stato parametrizzato con P3. Lo stesso procedimento è stato applicato al bordo opposto del raccordo per garantire simmetria. Il parametro P4 è stato vincolato a P3 tramite una relazione di simmetria definita nel *Parameter Set*.

Il procedimento è stato ricreato tal quale per il raccordo opposto andando a generare i parametri P4, P5, P6 e P7: tali parametri sono stati vincolati nella sezione *Parameter Set* ai parametri P1, P2 e P3 per garantire la simmetria. L'effetto di questi parametri è illustrato nelle Figure 4.3 e 4.2.



Figura 4.2: Valutazione grafica parametri del raccordo



Figura 4.3: Valutazione grafica parametri del raccordo

#### Parametrizzazione dello stelo

Si sono create due RBF Region in cui è stata selezionata la biella ed entrambe aventi due RBF Source. La prima RBF Region è stata impostata in questo modo:

- Prima *RBF Source*: si sono selezionate le superfici attorno all'occhio grande e all'occhio piccolo comprendendo anche la zona del raccordo in modo tale che il *morphing* non andasse a toccare in modo indesiderato la zona del raccordo precedentemente parametrizzata. Questa zona la si può vedere in Figura 4.4;
- Seconda *RBF Source*: seleziona le 8 facce laterali più esterne dello stelo in modo tale da poter parametrizzare lo spessore delle ali della sezione a doppio T.



Figura 4.4: Superficie fissa per il morphing dello stelo prima RBF Region

**P9 - RBF Source-width-Scaling y** Utilizzando il sistema di coordinate globale si è applicato uno *scaling* sulle superfici precedentemente selezionate in modo tale da poterle avvicinare o allontanare. Questo permette di poter variare lo spessore dell'ala della trave a doppio T.

**P10 - RBF Region-rob-thickness-Scaling y** In modo totalmente analogo alla prima *RBF Region* è stata impostata una zona fissa che si può vedere in Figura 4.5 e come zona su cui applicare il *morphing* si è selezionata la zona coincidente col bordo interno delle ali della sezione a doppio T (Fig: 4.6). Anche in questo caso il fine è quello di poter parametrizzare in modo completo lo spessore dell'ala della trave, ma potendone variare anche l'altezza dell'anima, che gioca un ruolo critico anche nella resistenza a *buckling* della biella.



Figura 4.5: Superficie fissa per il morphing dello stelo seconda RBF Region



Figura 4.6: Superficie soggetta a morphing su seconda RBF Region per lo stelo

#### Parametrizzazione dell'occhio grande e dell'occhio piccolo

Anche in questo caso, come per il morphing dello stelo, sono state create due RBFRegion selezionando l'intera biella, strutturate in maniera analoga: in ciascuna regione sono presenti due *RBF Source*, una dedicata alla definizione della zona fissa e l'altra alla zona soggetta a *morphing* tramite parametri di input.

Per entrambe le regioni, la zona fissa è costituita dalla superficie interna dell'occhio grande e dell'occhio piccolo, includendo anche le superfici del raccordo.

**P11 - RBF Source-rob-big eye-Scaling x** Nella seconda *RBF Source*, è stato creato un sistema di riferimento avente origine nel centro dell'occhio grande. Selezionando le superfici mostrate in Figura 4.7, è stato applicato uno *scaling* lungo gli assi giacenti nel piano del moto del manovellismo. In questo modo sono stati definiti i parametri P11 e P12, vincolati tra loro tramite la relazione P11 = P12 nella sezione *Parameter Set*.



Figura 4.7: Superficie dell'occhio grande soggetta a morphing

**P13 - RBF Source-rob-small eye-Scaling y** In modo del tutto analogo, sono stati definiti i parametri P13 e P14 che regolano, tramite uno *scaling*, lo spessore del materiale nella zona attorno all'occhio piccolo.

L'azione del *morphing* sullo stelo e sull'occhio grande e piccolo sono riassunti in Figura 4.8.



Figura 4.8: Azione dei parametri di morphing sullo steso e sugli occhi della biella

L'albero *RBF Morph* nel suo complesso si può vedere in Figura 4.9.



Figura 4.9: Albero *RBF Morph* 

#### 4.3.2 Dominio dei parametri

Una volta definiti i parametri di *morphing* e vincolati opportunamente per mantenere la simmetria della biella, è necessario stabilire il dominio dei parametri, ovvero il range entro cui essi possono variare. A tal fine, sono stati eseguiti numerosi test, variando individualmente ciascuno dei sette parametri indipendenti. Alcuni esempi rappresentativi delle deformazioni ottenute sono riportati nelle Figure 4.10, 4.11, 4.12, 4.13 e 4.14.



Figura 4.10: Azione del parametro P1 sul raccordo



Figura 4.11: Azione del parametro P2 sul raccordo


Figura 4.12: Azione del parametro P3 sul raccordo



Figura 4.13: Azione dei parametri P9 e P10 sullo stelo



(b) P13 = 0.95

Figura 4.14: Azione dei parametri P11 e P13 su occhio grande e piccolo

Dopo aver determinato il range massimo ammissibile per ogni parametro, si è considerata l'azione combinata di più parametri. In particolare, per il *morphing* del raccordo (parametri P1, P2, P3) e dello stelo (parametri P9 e P10), è stato necessario ridimensionare tali range per evitare configurazioni geometricamente distorte.

In questa fase è fondamentale effettuare un'analisi dello *Jacobiano* della mesh, poiché determinate combinazioni di parametri possono generare elementi a volume negativo, per i quali il determinante della matrice *Jacobiana* risulta negativo, ossia  $det(\mathbf{J}) \leq 0.$ 

Per prevenire tale situazione, è essenziale inserire tra la zona fissa e quella soggetta a spostamento tramite *morphing* una zona di transizione o *buffer*, all'interno della quale i nodi possono spostarsi in maniera progressiva e regolare. È tuttavia cruciale che questa zona sia sufficientemente discretizzata: per questo motivo, nelle regioni soggette a *morphing* si è proceduto a creare delle *Named Selection* e a raffittire localmente la mesh.

Nella mesh si è cercato di ottenere una transizione graduale, con zone che diventano progressivamente più fitte, in quanto una variazione brusca nella dimensione degli elementi potrebbe introdurre errori numerici dovuti all'elevata differenza di rigidezza tra elementi contigui. Le *Named Selection* definite e le operazioni fatte sulla mesh si possono vedere in Figura 4.15. Complessivamente la mesh risultante ha un numero di nodi pari a 211662 e numero di elementi pari a 109272.



Figura 4.15: Named Selection e operazioni su mesh

Il Dominio dei parametri scelto lo si può vedere in Tabella 4.2.

Si precisa che durante lo svolgimento dell'ottimizzazione questo dominio verrà ristretto come verrà spiegato nel Paragrafo 4.4.

Parametro	Da:	a:
P1	0.70	1.40
P2	0.60	1.40
P3	-0.70	0.10
P9	0.85	1.20
P10	0.70	1.20
P11	0.90	1.10
P13	0.95	1.15

Tabella 4.2: Range di variazione dei parametri di morphing

#### 4.3.3 Command APDL per lo spostamento del baricentro

Come parametro di output, oltre alla tensione di Von Mises massima sull'intera biella e sul raccordo, e al volume totale della biella, si desidera includere anche lo spostamento relativo del baricentro della biella modificata rispetto alla configurazione *baseline*. Poiché non è disponibile una funzione nativa nel software per eseguire tale operazione, è stato sviluppato un codice APDL inserito all'interno della sezione Solution di ANSYS Mechanical.

Come primo passo, è stata creata una Named Selection contenente esclusivamente la geometria della biella. Successivamente, è stata definita una seconda Named Selection denominata Biella\_element, il cui scoping method è stato impostato su Worksheet, così da selezionare unicamente gli elementi associati alla biella.

Il codice, una volta eseguito, seleziona tutti gli elementi appartenenti alla biella e determina il numero totale di elementi, insieme alla lista degli ID corrispondenti. Successivamente, si inizializzano le variabili per il volume totale e per le coordinate del baricentro (XC, YC, ZC).

All'interno di un ciclo \*DO, si itera su ciascun elemento della lista per ottenere:

- le coordinate del centroide dell'elemento nei tre assi  $(x_i, y_i, z_i)$ ;
- il volume associato all'elemento  $(V_i)$ ;

accumulando i prodotti  $x_i \cdot V_i$ ,  $y_i \cdot V_i$ ,  $z_i \cdot V_i$  e il volume totale. Al termine del ciclo, le coordinate del baricentro si ottengono come media pesata delle posizioni dei centroidi degli elementi finiti, utilizzando il volume di ciascun elemento come peso.

Applicando il codice alla configurazione *baseline*, si calcolano le coordinate del baricentro di riferimento. Nelle configurazioni *morphate*, il codice viene rieseguito per determinare il nuovo baricentro. Viene infine calcolata la variabile di output my\_DIST\_SIGN, definita come la differenza tra la coordinata X del baricentro della configurazione modificata e quella della configurazione di riferimento.

Di seguito è riportato il codice completo utilizzato per il calcolo:

```
ALLSEL
 1
    CMSEL,S,BIELLA_ELEMENT
2
    *GET, NELEM, ELEM, O, COUNT
3
    *VGET, EL_LIST, ELEM, , ELIST
 4
   V_TOT=0
5
6
   XC = 0
    YC = 0
 7
8
   ZC = 0
   *DO,i,1,NELEM
9
10
       elem_i=EL_LIST(i,1)
       *GET, xci, ELEM, elem_i, CENT, X
11
12
       *GET, yci, ELEM, elem_i, CENT, Y
13
       *GET,zci,ELEM,elem_i,CENT,Z
       *GET, volui, ELEM, elem_i, VOLU
14
       XC=XC+xci*volui
15
       YC=YC+yci*volui
16
       ZC = ZC + zci * volui
17
       V_TOT = V_TOT + volui
18
    *ENDDO
19
20
   XC = XC / V_TOT
21
    YC=YC/V_TOT
22
23
    ZC = ZC / V_TOT
24
    *SET, XB, 27.87230794
25
    *SET, YB, 0.1270220093E-04
26
    *SET, ZB, -0.2394551962E-04
27
28
29
    DX = XC - XB
   DY = YC - YB
30
    DZ = ZC - ZB
31
32
    my_DIST = sqrt(DX**2 + DY**2 + DZ**2)
33
    my_DIST_SIGN = XC - XB
34
```

Codice 4.1: Calcolo del baricentro della biella

### 4.3.4 Design of Experiments (DoE)

Una volta definito il mesh morphing, è stato trascinato un blocco di tipo Response Surface Optimization all'interno di Workbench, posizionandolo al di sotto del blocco Parameter Set. Come algoritmo di sampling è stato adottato il metodo Latin Hypercube Sampling (LHS); sono stati così generati 80 Design Point (DP) e, successivamente, impostati gli obiettivi dell'ottimizzazione nella sezione *Optimization*.

Una volta fatta girare l'analisi e valutati i risultati ottenuti è emerso che i Design Point caratterizzati da valori minimi di tensione di Von Mises ( $\sigma_{VM}$ ), pari a circa 388MPa, erano associati a un incremento di massa estremamente significativo rispetto alla configurazione baseline, con aumenti superiori al 70%. Sebbene da un punto di vista teorico tali soluzioni possano essere considerate ottimali dal punto di vista strutturale, in pratica risultano non implementabili a causa del notevole aumento di peso della biella, che ne comprometterebbe l'equilibrio dinamico e la compatibilità con il resto del sistema meccanico.

Inoltre, si è osservato che i valori di  $\sigma_{VM}$  stimati mediante il modello DoE per i *Candidate Point* (CP) non risultavano coerenti con quelli ottenuti tramite valutazione diretta degli stessi punti. Questa discrepanza è con tutta probabilità attribuibile all'estensione eccessiva del dominio dei parametri rispetto al numero limitato di DP utilizzati.

Nonostante tali limitazioni, questa prima fase di analisi ha permesso di individuare un intervallo più significativo entro cui variare i parametri per indirizzare correttamente il processo di ottimizzazione. Pertanto, rispetto ai valori riportati in Tabella 4.2, si è proceduto a una restrizione del dominio parametrico. Il nuovo intervallo di variazione adottato è riportato in Tabella 4.3.

Parametro	Da:	a:
P1	0.946	1.386
P2	0.704	1
P3	-0.498	0.035
P9	0.852	1.104
P10	0.709	1.071
P11	0.902	1.013
P13	0.952	1.028

Tabella 4.3: Aggiornamento range di variazione dei parametri di morphing

Utilizzando il nuovo dominio dei parametri, sono stati generati 100 DP mediante il metodo di campionamento LHS. Gli obiettivi delle ottimizzazioni sono stati definiti come segue:

- Nella prima ottimizzazione, si è impostato come obiettivo la minimizzazione della tensione di Von Mises ( $\sigma_{VM}$ ) e dello spostamento del baricentro. Come vincolo è stato fissato il volume della biella, che doveva rimanere il più possibile vicino al valore della configurazione baseline (17852mm<sup>3</sup>), con una tolleranza di  $\pm 40mm^3$ .
- La seconda ottimizzazione aveva invece come obiettivo la minimizzazione del volume della biella, imponendo che la tensione massima di Von Mises rimanesse inferiore a 551MPa (valore di riferimento della configurazione *baseline*), e che lo scostamento del baricentro non superasse i  $\pm 4mm^3$ .

I risultati di queste ottimizzazioni verranno presentati nel Paragrafo 4.4. Il modello *Workbench* nel suo complesso lo può vedere in Figura 4.16.



Figura 4.16: Modello sviluppato per l'ottimizzazione

# 4.4 Risultati dell'ottimizzazione

L'analisi è stata eseguita secondo quanto descritto nel Paragrafo 4.3, analizzando un totale di 100 *Design Point* (DP). I risultati ottenuti si sono rivelati fin da subito significativamente migliorativi rispetto alla configurazione *baseline*, in riferimento ai parametri di confronto selezionati (volume totale, spostamento del baricentro e tensione massima sul corpo della biella).

Tuttavia, si è deciso di procedere con la generazione di nuovi *Candidate Point* (CP), utilizzando le due strategie di ottimizzazione descritte nel Sottoparagrafo 4.3.4, e di rieseguire le simulazioni corrispondenti. Ogni ottimizzazione mediante DoE ha prodotto tre nuovi *Candidate Point*. Il processo è stato ripetuto iterativamente fino a raggiungere un totale di 124 DP, come illustrato nel Paragrafo 4.1.

Questa procedura ha lo scopo di migliorare la qualità del metamodello, in particolare il livello di accuratezza della *Response Surface*. Le configurazioni ottimizzate risultanti sono riportate in Tabella 4.4.

DP	P1	$\mathbf{P2}$	P3	<b>P9</b>	P10	P11	P13
113	1.239	0.787	-0.087	1.102	0.781	0.995	0.954
119	1.218	0.765	-0.146	1.003	0.900	0.903	0.952

Tabella 4.4: Valori dei parametri geometrici per i due DP selezionati

I risultati ottenuti per questi DP e il miglioramento percentuale rispetto alla configurazione *baseline* si può osservare in Tabelle 4.5.

DP	$\sigma_{VM}$ [MPa]	$V_{\rm tot} \ [{\rm mm^3}]$	$\Delta \boldsymbol{\sigma}$ [MPa]	$\Delta \sigma$ [%]	$\Delta V ~ [\%]$	$\Delta x_{\rm G} \; [\rm{mm}]$
113	455.4	18016.4	-95.6	-17.4	0.9	-0.6
119	542.0	14110.9	-9.0	-1.6	-21.0	4.4

Tabella 4.5: Risultati dei DP ottimizzati rispetto alla configurazione baseline

Dai risultati ottenuti si può osservare che, nel caso del DP 113, a fronte di un lieve incremento di volume inferiore all'1%, si è ottenuta una riduzione significativa della tensione massima ( $\sigma_{VM}$ ), pari al 17%, senza che si sia verificato un apprezzabile spostamento del baricentro.

Al contrario, nel DP 119, pur avendo una riduzione del volume pari a circa il 21%, la tensione massima è comunque diminuita, seppur in modo contenuto, dell'1.6%.

Le configurazioni ottimizzate DP 113 e 119 si possono vedere rispettivamente in Figura 4.17 e 4.18.



Figura 4.17: Prima ottimizzazione - DP 113



Figura 4.18: Seconda ottimizzazione - DP 119

La distribuzione delle tensioni per le configurazioni ottimizzate è riportata nelle Figure 4.19 e 4.20.



Figura 4.19: Distribuzione delle tensioni prima ottimizzazione - DP113



Figura 4.20: Distribuzione delle tensioni seconda ottimizzazione - DP119

A questo punto, considerando le variazioni ottenute nella massa della biella, nella posizione del suo baricentro e nel momento d'inerzia, in particolare per la seconda ottimizzazione, si procede al riutilizzo del codice dinamico descritto nel Sottoparagrafo 2.4.1. Per determinare il nuovo momento d'inerzia baricentrico delle bielle ottimizzate, si è fatto ricorso allo strumento *Power Surface* di *Solid-Works*<sup>®</sup>. Questo strumento consente di generare superfici continue e modificabili (B-Rep) a partire da geometrie approssimative, come ad esempio mesh triangolari in formato .STL. Il risultato è un corpo solido costituito da un elevato numero di superfici, come mostrato in Figura 4.21.



Figura 4.21: Utilizzo Power Surface sulla mesh del DP 113

Dai risultati ottenuti dal codice, sostituendo le nuove quantità caratteristiche, si osserva che il valore massimo delle reazioni vincolari  $R_{px}$  e  $R_{bx}$  si verifica ancora per  $\alpha = 344.752^{\circ}$ . Il confronto tra le reazioni vincolari ottenute e quelle della configurazione baseline è riportato in Tabella 4.6.

Configurazione	$R_{bx}$ [N]	$R_{by}$ [N]	$R_{px}$ [N]	$R_{py}$ [N]
Baseline	17512.70	1887.53	-19649.90	-1464.15
DP 113	17484.40	1863.07	-19649.90	-1466.70
DP 119	18880.50	1726.54	-19649.90	-1462.78
$\Delta$ % (DP 113)	-0.16	-1.30	0.00	0.17
$\Delta$ % (DP 119)	7.81	-8.53	0.00	-0.09

Tabella 4.6: Variazione delle reazioni vincolari rispetto alla configurazione baseline

Come previsto, nella prima ottimizzazione si riscontrano differenze molto contenute rispetto ai valori della configurazione *baseline*. Osservando i risultati ottenuti, si può affermare che, data l'entità trascurabile delle variazioni, le tensioni riportate precedentemente per i design ottimizzati possono essere considerate attendibili. In questi calcoli si assume l'ipotesi che la cinematica del motore non venga alterata dalle variazioni di massa, momento d'inerzia e posizione del baricentro della biella, e che il profilo delle pressioni in camera di combustione rimanga invariato.

# 4.5 Verifica a *buckling*

#### Fondamenti teorici dell'instabilità (buckling)

Il *buckling* è un fenomeno strutturale per cui una struttura soggetta a carichi compressivi può manifestare spostamenti prevalentemente ortogonali alla direzione del carico stesso. La teoria di Eulero fornisce uno strumento analitico utile per stimare il carico critico, detto *carico di punta*, oltre il quale il sistema entra in instabilità.

In ambito strutturale, la valutazione del carico di punta è fondamentale, poiché il *buckling* può verificarsi in modo improvviso e catastrofico, a differenza di altri fenomeni come la plasticizzazione, i quali generalmente sono preceduti da segnali evidenti. È importante sottolineare che, nel caso del *buckling*, l'impiego di un acciaio alto-resistenziale non apporta benefici significativi, in quanto il fenomeno è governato esclusivamente dal modulo di Young, che risulta pressoché costante per tutti gli acciai.

Si può dimostrare che, per una trave incernierata alle due estremità, in caso di linearità e piccoli spostamenti, il carico critico di instabilità è dato da:

$$P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} EI \tag{4.2}$$

Questa dimostrazione classica, ottenuta risolvendo l'equazione differenziale dell'equilibrio elastico, è riportata ad esempio in [9]. Nel nostro caso, si considera sempre n = 1, in quanto rappresenta il primo modo di instabilità. Quest'ultimo è associato al valore più basso del carico critico rispetto ai modi successivi, e quindi la struttura, in assenza di vincoli aggiuntivi, tenderà ad andare in instabilità secondo il primo modo. Un'eccezione si verifica, ad esempio, introducendo un vincolo intermedio (come una cerniera posta a metà della trave), che rende inammissibile la deformata associata al primo modo: la struttura potrà allora deformarsi secondo modi superiori.

Una trave a doppio T vincolata con due cerniere sferiche entra in instabilità deformandosi lungo la direzione associata al minimo momento d'inerzia.

In modo analogo al caso incernierato-incernierato, è possibile determinare il carico critico anche per altre condizioni di vincolo (ad esempio incernierata-incastrata, incastrata-libera, ecc.). A tal fine, è utile introdurre il concetto di *lunghezza equivalente*  $L_{eq}$ , che rappresenta la lunghezza effettiva della trave da utilizzare nella formula di Eulero. Tale lunghezza si ottiene moltiplicando la lunghezza reale Lper un fattore K, detto fattore effettivo di lunghezza.

Per comprendere il significato di questo coefficiente, si consideri che una trave incastrata-libera può essere assimilata a una trave incernierata-incernierata di lunghezza doppia; di conseguenza, il fattore K per tale configurazione è pari a 2.

La formula generale per il calcolo del carico critico, considerando tutte le principali condizioni di vincolo, può essere espressa come:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \tag{4.3}$$

La nella Tabella 4.7 sono riassunti i valori di lunghezza equivalente e K per le principali condizioni di vincolo.

Configurazione	$L_{\rm eq}$	K
Incernierata–Incernierata	L	1
Incastro–Libera	2L	2
Incastro–Incastro	0.5L	0.5
Incastro–Incernierata	0.699L	0.699

Tabella 4.7: Valori di lunghezza equivalente e fattore effettivo di lunghezza K per diverse condizioni di vincolo

Ulteriori fattori che andrebbero considerati in un'analisi dell'instabilità accurata sono:

- Carichi decentrati, ovvero aventi una certa eccentricità rispetto alla posizione del baricentro della sezione retta;
- Presenza di imperfezioni locali, le quali riducono il carico critico necessario affinché si manifesti la flessione. Tuttavia, va evidenziato che tali imperfezioni

rendono il fenomeno più facilmente rilevabile, consentendo un'identificazione precoce prima che possa degenerare in modo catastrofico;

- Instabilità elasto-plastica di colonna;
- Effetti di stati tensionali pre esistenti che potrebbero cambiare la forma della trave. Questo fenomeno viene detto *Stress Stiffening*.

I moderni solutori FEM affrontano l'analisi di instabilità principalmente attraverso due approcci distinti: un approccio lineare, noto come *eigenvalue buckling*, e un approccio non lineare, che include le non linearità geometriche (e, se necessario, anche materiali) per simulare il comportamento reale della struttura fino al collasso.

L'analisi del *buckling* si traduce in un problema agli autovalori, analogo a un'analisi modale. In tale contesto si determina un fattore moltiplicativo (autovalore  $\lambda$ ) e il corrispondente *modo di buckling* (autovettore degli spostamenti **x**), tali per cui un carico esplorativo unitario **P**<sup>\*</sup>, se moltiplicato per  $\lambda$ , conduce la struttura all'instabilità (ovvero a spostamenti teoricamente infiniti).

La matrice di rigidezza totale del sistema si compone come somma di due contributi [2]:

- $\mathbf{K}_{el}$ : matrice di rigidezza elastica;
- $\mathbf{K}_G$ : matrice di rigidezza geometrica, funzione dello stato tensionale ottenuta a seguito di una preliminare analisi statica.

Attraverso un processo di linearizzazione si può scrivere che:

$$\mathbf{K}_G(\mathbf{P}) = \lambda \, \mathbf{K}_G(\mathbf{P}^*),\tag{4.4}$$

dove  $\mathbf{P}$  è il carico critico che conduce la struttura all'instabilità. Considerando ora che :  $\mathbf{P} = \mathbf{K}_{tot}\mathbf{x}$  otteniamo:

$$\mathbf{P} = \left[\mathbf{K}_{el} + \lambda \, \mathbf{K}_G(\mathbf{P}^*)\right] \mathbf{x} = \lambda \, \mathbf{P}^*,\tag{4.5}$$

si osserva che la condizione affinché gli spostamenti diventino infiniti corrisponde all'annullamento del determinante della matrice totale di rigidezza, ovvero  $det(\mathbf{K}_{el} + \lambda \mathbf{K}_G) = 0.$ 

La risoluzione del sistema porta a una serie di autovalori  $\lambda_i$  e relativi autovettori  $\mathbf{x}_i$ , ciascuno dei quali rappresenta un possibile modo di instabilità. Generalmente, ci si concentra sul primo autovalore  $\lambda_1$  e sulla corrispondente deformata  $\mathbf{x}_1$ , poiché rappresentano il modo più critico e pericoloso.

### 4.5.1 Applicazione al caso studio

Una volta ottenute le configurazioni ottimizzate, è necessario eseguire su di esse una verifica all'instabilità nei punti di funzionamento in cui la biella è soggetta al massimo carico di compressione. Le posizioni angolari della manovella considerate maggiormente critiche a tal fine sono:

- Punto morto superiore (PMS) quando si registra la pressione massima in camera di combustione. In tale configurazione, tuttavia, l'inerzia del pistone e della parte superiore della biella tende parzialmente a contrastare il carico assiale di compressione;
- Punto morto inferiore (PMI): la biella agisce per frenare il pistone in fase di discesa. Questa condizione diventa particolarmente severa al crescere del regime di rotazione del motore.

Nel caso in esame, considerato che il motore non opera a regimi di rotazione estremi, si è assunto che la condizione di carico più gravosa ai fini dell'instabilità si verifichi approssimativamente in corrispondenza del punto morto superiore (PMS), ovvero nel momento in cui si registra la pressione massima in camera di combustione.

Sono state eseguite svariate analisi, variando la tipologia di vincoli applicati alla biella per rappresentare correttamente le condizioni cinematiche e di carico. In particolare, per l'occhio piccolo sono state considerate due ipotesi:

- Configurazione semplificata (biella esattamente al PMS): si assume che la pressione massima agisca con la biella perfettamente allineata all'asse del cilindro. In questa configurazione, il vincolo viene modellato con un *Remote Displacement* che consente solo una traslazione lungo l'asse x globale;
- Configurazione più realistica (biella inclinata di 4.5°): si considera che, come avviene realmente, la pressione massima si manifesti quando la biella è inclinata di circa 4.5° rispetto all'asse del cilindro. A tal fine, è stato definito un sistema di riferimento locale centrato al piede di biella, ruotato di  $-4.5^{\circ}$ attorno all'asse z. Il vincolo è stato impostato come *Remote Displacement*, ammettendo una traslazione lungo la direzione x del nuovo sistema (cioè lungo l'asse del cilindro), e rotazioni libere attorno all'asse z.

Per quanto riguarda l'occhio grande, in questa fase, in entrambe le configurazioni è stato applicato un vincolo di tipo *Remote Displacement* che impedisce completamente le traslazioni e ammette esclusivamente la rotazione attorno all'asse z.

In merito alla modellazione dei carichi:

- Nel modello semplificato (biella dritta al PMS), è stato applicato un carico assiale di compressione (*bearing load*)lungo l'asse x, pari al modulo del vettore risultante delle componenti  $R_{Px}$  e  $R_{Py}$ , come scelta cautelativa.
- Nel modello realistico (biella inclinata), è stato applicato un *bearing load* sull'occhio piccolo, scomposto nelle componenti  $R_{Px} \in R_{Py}$ , secondo il sistema di riferimento globale.

Il sistema di vincolo utilizzato e il carico applicato per la configurazione più accurata, sono mostrati in Figura 4.22.



Figura 4.22: Sistema di riferimento all'asse del cilindro e componenti del *Bearing* load

La schermata Workbench del modello utilizzato è mostrata in Figura 4.23:



Figura 4.23: Schermata WB per analisi a buckling

Come è evidenziato nei risultati riportati in Tabella 4.8, il confronto tra le due configurazioni analizzate (semplificata e realistica) mostra che la condizione più gravosa, seppur di poco, si verifica nel caso in cui venga considerata la reale inclinazione della biella rispetto all'asse del cilindro.

Sulla base di tale osservazione, si è deciso di eseguire un'ulteriore analisi solo su questo modello più realistico, modificando le condizioni al contorno applicate all'occhio grande. In particolare, è stato considerato un vincolo di tipo *cerniera sferica*, giustificato dal fatto che, nella realtà, la bronzina richiede un piccolo gioco funzionale per garantire una corretta lubrificazione.

È importante sottolineare che tale ipotesi risulta fortemente cautelativa, poiché nella pratica le rotazioni attorno agli assi  $x \in y$  sono generalmente molto limitate, ma non del tutto impedite. I risultati per le 3 analisi sono riassunti nella Tabella 4.8.

DP	Occhio grande	$oldsymbol{ heta}(^\circ)$	$\lambda_1$	$\lambda_2$
Baseline	Cerniera semplice	0	6.0127	14.437
113	Cerniera semplice	0	6.949	16.772
119	Cerniera semplice	0	4.630	12.696
Baseline	Cerniera semplice	-4.5	6.000	14.428
113	Cerniera semplice	-4.5	6.932	16.762
119	Cerniera semplice	-4.5	4.623	12.693
Baseline	Cerniera sferica	-4.5	5.182	6.000
113	Cerniera sferica	-4.5	6.248	6.933
119	Cerniera sferica	-4.5	4.622	4.862

Tabella 4.8: Risultati dell'analisi di *buckling*: confronto tra diverse configurazioni e condizioni di vincolo

Come previsto, l'introduzione di una cerniera sferica all'occhio grande comporta una riduzione dei coefficienti di moltiplicazione del carico critico. Ciò è dovuto al fatto che, in tale configurazione vincolare, la biella è libera di deformarsi anche lungo la direzione associata al minimo momento d'inerzia della sua sezione, tipicamente una sezione a doppio T.

Le prime due deformate modali ottenute nelle due differenti condizioni di vincolo, cerniera semplice all'occhio grande e cerniera sferica all'occhio grande, sono mostrate rispettivamente in Figura 4.24 e Figura 4.25.



#### (a) Primo modo di *buckling*



(b) Secondo modo di $\mathit{buckling}$ 

Figura 4.24: Modi dibuckling per biella vincolata con una cerniera semplice al·l'occhio grande



(a) Primo modo di *buckling* 



(b) Secondo modo di *buckling* 

Figura 4.25: Modi dibuckling per biella vincolata con una cerniera sferica all'occhio grande

Si procederà ora al confronto tra i risultati ottenuti tramite simulazione FEM e quelli ricavabili analiticamente mediante l'applicazione della formula di Eulero, riportata nell'Equazione 4.3.

Per il calcolo analitico, il momento d'inerzia della sezione retta verrà determinato a partire dalle geometrie delle bielle ottimizzate, ricostruite attraverso lo strumento *Power Surface* come descritto nel Paragrafo 4.4. La sezione verrà estratta in corrispondenza della metà della lunghezza dello stelo. La lunghezza L assunta sarà l'interasse tra i centri dell'occhio grande e dell'occhio piccolo, mentre per il modulo di Young E si adotterà il valore tipico dell'acciaio, pari a 210 GPa.

È fondamentale selezionare il corretto momento d'inerzia in base al tipo di vincolo considerato:

- Modello con cerniera semplice all'occhio grande: in questo caso si assume che la lunghezza equivalente sia pari a L e si considera il momento d'inerzia maggiore della sezione (lungo l'asse principale d'inerzia). Questo perché si sta considerando una trave alla Eulero incernierata-incernierata;
- Modello con cerniera sferica all'occhio grande: in questa configurazione, il comportamento dell'occhio piccolo è assimilabile a un incastro non potendo ruotare lungo l'asse y. Pertanto, si assume una lunghezza equivalente pari a 0.699L, come previsto per travi con vincolo incastro-cerniera (Tab: 4.7). In questo caso, si considera il momento d'inerzia minimo, ossia lungo l'asse debole della sezione.

I risultati del confronto tra l'analisi FEM e il calcolo analitico sono riportati in Tabella 4.9.

DP	Occhio grande	$\lambda_1$ FEM	$\lambda_1$ Eulero	$\Delta\lambda~[\%]$
Baseline	Cerniera semplice	6.0127	8.6850	30.77
113	Cerniera semplice	6.9490	10.5314	34.02
119	Cerniera semplice	4.6300	7.0353	34.19
Baseline	Cerniera sferica	5.1820	4.0421	-28.20
113	Cerniera sferica	6.2480	5.2239	-19.60
119	Cerniera sferica	4.6220	4.0174	-15.05

Tabella 4.9: Confronto tra risultati FEM e calcolo analitico con teoria di Eulero

La differenza relativa percentuale rispetto ai risultati ottenuti tramite la formula di Eulero varia da un massimo di circa +34% a un minimo di -28%. Tale scostamento è attribuibile al fatto che la biella non può essere assimilata a una trave a sezione retta costante: la sua geometria presenta variazioni lungo l'asse longitudinale, specialmente in prossimità degli occhi. Inoltre, l'approssimazione della rigidezza flessionale considerando esclusivamente il momento d'inerzia calcolato a metà dello stelo rappresenta una semplificazione che trascura le reali condizioni al contorno e la distribuzione effettiva della massa lungo tutta la lunghezza della biella.

#### Semplificazioni adottate

Si ricorda che, nell'ambito delle analisi condotte, le reazioni vincolari utilizzate corrispondono a quelle calcolate per la configurazione *baseline*, secondo l'algoritmo sviluppato nell'analisi dinamica riportata nel Sottoparagrafo 2.4.1. Come mostrato in Tabella 4.6, le variazioni delle reazioni vincolari nelle configurazioni ottimizzate risultano essere trascurabili per l'occhio piccolo (massima variazione pari allo 0.17%).

Tuttavia, è opportuno sottolineare che l'algoritmo dinamico impiegato approssima la massa della biella come interamente concentrata nel suo baricentro, mentre la massa del pistone viene condensata nel piede di biella. Con tale ipotesi non si tiene conto del fatto che la metà superiore della biella non contribuisce allo scarico delle forze di compressione dovute all'inerzia della parte superiore stessa. Pertanto, il calcolo a *buckling* ottenuto risulta essere conservativo.

Per raffinare tale stima, si può assumere che la massa della biella sia suddivisa tra l'occhio grande e quello piccolo in modo tale che il suo baricentro ricada nella posizione originaria. Si consideri un modello semplificato con due masse puntiformi  $m_{bm} e m_{pb}$  situate rispettivamente all'occhio grande e piccolo, e si imponga che il baricentro della biella  $x_g$  venga preservato:

$$m_b = m_{bm} + m_{pb}$$
 e  $x_g = \frac{m_{pb} \cdot l}{m_b}$ 

dove:

- $m_b$  è la massa totale della biella,
- $m_{bm}$  è la massa attribuita all'occhio grande,
- $m_{pb}$  è la massa attribuita all'occhio piccolo,
- l è l'interasse tra occhio grande e occhio piccolo,
- $x_g$  è la posizione del baricentro rispetto all'occhio grande.

Risolvendo il sistema si ottiene:

1

$$m_{\rm bm} = 0.1135 \,\mathrm{kg}, \qquad m_{\rm pb} = 0.0398 \,\mathrm{kg}$$

Considerando l'accelerazione lineare del pistone, pari a  $-16629 \text{ m/s}^2$ , e l'accelerazione lungo x del baricentro della biella, pari a  $-14014 \text{ m/s}^2$ , si assume che la semimetà superiore della biella si muova lungo x con un'accelerazione media pari a:

$$a_{\text{media}} = \frac{16629 + 14014}{2} = 15321.5 \,\text{m/s}^2$$

La forza da sottrarre alla reazione  $R_{px}$ , dovuta all'inerzia della parte superiore della biella, è:

$$R_{px} = 19650 - 0.0398 \cdot 15321.5 = 19040 \,\mathrm{N}$$

Si stima quindi che i fattori moltiplicativi dei carichi calcolati in precedenza aumenterebbero di circa il 3.1%. Per una valutazione più accurata, sarebbe necessario considerare la distribuzione continua della massa della biella lungo il suo asse longitudinale, evitando una modellazione discreta. Un'ulteriore semplificazione adottata consiste nell'aver trascurato le forze d'inerzia distribuite che, generando uno stato tensionale nella biella, contribuirebbero a modificare la matrice geometrica  $\mathbf{K}_{\mathbf{G}}$ . Tale effetto, noto come *stress stiffening*, potrebbe essere tenuto in conto precaricando la struttura con il campo delle forze d'inerzia e ricalcolando la nuova matrice di rigidezza totale, come discusso nel Paragrafo 4.5.

### 4.6 Analisi modale

#### 4.6.1 Cenni teorici sull'analisi modale

L'analisi modale rappresenta l'analisi dinamica fondamentale nello studio del comportamento vibratorio delle strutture. Il suo obiettivo principale è quello di determinare le frequenze proprie di vibrazione e le relative forme modali (modi propri di vibrare), ovvero le configurazioni geometriche assunte dalla struttura durante la vibrazione libera. Si tratta di un'analisi lineare, pertanto valida esclusivamente in condizioni di piccole deformazioni.

Per la risoluzione del problema è necessario conoscere le caratteristiche inerziali, di rigidezza e di smorzamento del sistema. Tuttavia, la matrice di smorzamento risulta spesso difficile da determinare sperimentalmente e, in molti casi, può essere trascurata senza compromettere significativamente l'accuratezza dei risultati.

Nel caso in cui si trascuri la matrice di smorzamento, l'analisi modale si riconduce alla risoluzione del seguente problema agli autovalori, derivante dalla formulazione del moto libero (non smorzato) di un sistema discreto:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \tag{4.6}$$

Dove **M** è la matrice di massa (inerzia), **K** è la matrice di rigidezza, e  $\mathbf{x}(t)$  è il vettore degli spostamenti nel tempo. Cercando una soluzione armonica del tipo  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}_{0i} \sin(\omega_i t)$ , si ottiene:

$$\left(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}\right) \mathbf{u}_{0i} = \mathbf{0} \tag{4.7}$$

Dove  $\omega_i$  è la pulsazione naturale del *i*-esimo modo (in rad/s), e  $\mathbf{u}_{0i}$  è il corrispondente autovettore modale.

La soluzione di questo sistema fornisce una serie di autovalori  $\omega_i^2$  e autovettori  $\mathbf{u}_{0i}$  che rappresentano, rispettivamente, le frequenze naturali e le forme modali

associate. In genere, si considerano solo i modi a bassa frequenza, in quanto quelli a frequenza elevata sono spesso fortemente smorzati e di minore rilevanza pratica.

Nel caso in cui si voglia includere anche lo smorzamento, l'equazione del moto si modifica come segue [14]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$$
(4.8)

Dove  $\mathbf{C}$  è la matrice di smorzamento. La soluzione di questo sistema è più complessa e richiede l'adozione di tecniche specifiche, come il metodo di Ducan.

Una possibile approssimazione, molto utilizzata in ambito industriale, consiste nell'esprimere la matrice di smorzamento come combinazione lineare delle matrici di massa e rigidezza, secondo la legge:

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \tag{4.9}$$

Dove i coefficienti  $\alpha \in \beta$  possono essere stimati sperimentalmente, ad esempio tramite il metodo del decremento logaritmico. In genere,  $\alpha$  ha un effetto prevalente sui modi ad alta frequenza, mentre  $\beta$  influisce maggiormente sui modi a bassa frequenza; valori tipici sono  $\alpha \approx 1 \in \beta \approx 10^{-4}$ . I solutori agli elementi finiti risolvono questi problemi mediante algoritmi iterativi di vario tipo. Si ricorda che le pulsazioni naturali e annessi modi di vibrare di una struttura sono una caratteristica del sistema che prescinde dai carichi applicati, quindi nell'analisi che verrà sviluppata nel Sottoparagrafo 4.6.2.

### 4.6.2 Applicazione al caso studio

L'applicazione dell'analisi modale alle due configurazioni ottimizzate individuate ha lo scopo di valutare se le modifiche geometriche introdotte possono influire significativamente sul comportamento dinamico della biella e, più in generale, sull'interazione con la dinamica del motore.

Studiare in modo esaustivo la dinamica di un motore a combustione interna è un compito complesso e non sempre è possibile stabilire in modo assoluto se una variazione delle forme modali o delle frequenze naturali comporti un miglioramento o un peggioramento del comportamento dinamico. Per tale motivo, si è adottato un approccio comparativo, volto a verificare se le prime pulsazioni naturali (e le relative forme modali) delle configurazioni ottimizzate differiscano in maniera significativa da quelle della configurazione *baseline*. Le sollecitazioni dinamiche importati sono associate a  $\omega e 2\omega$  le forze connesse a frequenze maggiori generalmente sono troppo smorzate e non in grado di mettere in crisi la risposta dinamica della biella. Per questo motivo ci limiteremo all'analisi della prima frequenza naturale per scongiurare fenomeni di risonanza e si richiede che questa sia molto maggiore della frequenza di rotazione della manovella. In generale, per bielle molto pesanti potrebbe essere necessario fare analisi più approfondite come analisi di risposta armonica o, in casi ancora più particolari, lo studio di risposta nel tempo.

Analogamente a quanto fatto per l'analisi di *buckling*, sono state effettuate due distinte analisi modali variando le condizioni di vincolo. In entrambi i casi si è considerata la configurazione al punto morto superiore (PMS). L'occhio piccolo è stato modellato mediante un vincolo di tipo *Remote Displacement*, che consente la traslazione lungo l'asse x e la rotazione attorno all'asse z.

Le due varianti analizzate differiscono per le condizioni imposte all'occhio grande:

- Caso 1: cerniera semplice, che impedisce le traslazioni ma consente la rotazione attorno all'asse z;
- Caso 2: cerniera sferica, che simula l'accoppiamento reale con la bronzina che permette di avere piccole rotazioni attorno agli assi  $x \in y$ .

Al solutore è stato richiesto di calcolare i primi sei modi propri di vibrazione della biella. Tuttavia, come discusso nel Sottoparagrafo 4.5, si è ritenuto più rilevante focalizzare il confronto sui primi due modi, in quanto maggiormente significativi ai fini dell'interazione con la dinamica del motore.

I risultati relativi alla prima e alla seconda pulsazione naturale, ottenuti per ciascuna delle due condizioni di vincolo considerate, sono riportati in Tabella 4.10 per la configurazione *baseline* e per le due configurazioni geometricamente ottimizzate.

DP	Occhio grande	$\mathbf{f_{n1}} \; [\mathrm{Hz}]$	$\mathbf{f_{n2}}\;[\mathrm{Hz}]$
Baseline	Cerniera semplice	2423.00	6497.70
113	Cerniera semplice	2641.50	6401.00
119	Cerniera semplice	2349.10	6178.90
$\Delta f_{nMAX}$ %		9.02	-4.91
Baseline	Cerniera sferica	727.88	2073.50
113	Cerniera sferica	860.99	2209.50
119	Cerniera sferica	876.81	2242.50
$\Delta f_{nMAX}$ %		-20.26	8.15

Tabella 4.10: Confronto tra le prime due pulsazioni naturali per diverse configurazioni e condizioni di vincolo

Dai risultati ottenuti si osserva che lo scostamento rispetto al valore della configurazione baseline risulta minimo. Inoltre, la frequenza naturale più bassa, pari a 727 Hz, è ampiamente superiore rispetto alla frequenza con cui ruota la manovella, calcolata come  $f_{\text{manovella}} = \frac{10600}{60} = 176.67$  Hz, dove 10600 rappresenta la velocità massima di rotazione del motore. Le prime due forme modali, associate alle due condizioni di vincolo considerate, sono riportate rispettivamente nelle Figure 4.26 e 4.27.



#### (a) Primo modo di vibrare



(b) Secondo modo di vibrare

Figura 4.26: Modi di vibrare per biella vincolata con una cerniera semplice all'occhio grande



(b) Secondo modo di vibrare

Figura 4.27: Modi di vibrare per biella vincolata con una cerniera sferica all'occhio grande

# 5 Modello di ordine ridotto (ROM)

Nel campo dell'ingegneria computazionale, i modelli numerici basati sul *Metodo degli Elementi Finiti* sono spesso caratterizzati da un elevato numero di gradi di libertà (GdL), necessari per descrivere con accuratezza geometrie complesse e stati tensionali distribuiti. Sebbene tale dettaglio garantisca una simulazione ad alta fedeltà, comporta inevitabilmente un notevole onere computazionale, sia in termini di tempo che di risorse hardware.

Per ridurre questo costo computazionale, si fa ricorso ai cosiddetti *modelli di* ordine ridotto (Reduced Order Models, ROM), che consentono di rappresentare il comportamento globale del sistema utilizzando un numero ridotto di GdL. Pur semplificando il problema, i ROM riescono a preservare le caratteristiche dominanti della risposta strutturale o fisica.

Questi approcci, basati su metodi statistici, potrebbero inizialmente apparire lontani dall'ingegneria meccanica. Tuttavia, oggigiorno i *Big Data* e i metodi di *Intelligenza Artificiale* (AI) stanno assumendo un ruolo sempre più centrale, affiancando le tradizionali simulazioni computazionali ad alto costo. In questo scenario, tecniche come il *machine learning*, la regressione multivariata, le reti neurali e i modelli surrogati permettono di ridurre drasticamente i tempi di calcolo, facilitando l'analisi in tempo reale, l'ottimizzazione multi-obiettivo e il controllo adattivo dei sistemi.

La loro applicazione si rivela particolarmente vantaggiosa in ambiti in cui è richiesta rapidità di calcolo, come l'ottimizzazione multi-obiettivo o il controllo in tempo reale. Degna di nota è anche l'adozione dei ROM in settori interdisciplinari come la biomeccanica e la simulazione medica.

# 5.1 Fondamenti sui modelli di ordine ridotto

Nel panorama delle tecniche di riduzione, è possibile classificare i *Reduced Order Models* (ROM) secondo diverse logiche. Una distinzione rilevante è quella tra approcci *intrusivi* e *non intrusivi*. I metodi intrusivi si fondano su una manipolazione diretta delle equazioni del modello fisico originale e portano alla formulazione esplicita di un sistema a dimensionalità ridotta. Al contrario, i metodi *non intrusivi* si basano esclusivamente sui dati input-output del sistema, senza richiedere accesso diretto alle equazioni di governo. In tal caso, la costruzione del modello ridotto avviene mediante tecniche statistiche, algoritmi di interpolazione o approcci di *machine learning*, e i risultati ottenuti non sono necessariamente legati a interpretazioni fisiche dirette.

Nel presente lavoro si è deciso di concentrare l'attenzione sui metodi *non intrusivi*, in quanto più versatili e facilmente adattabili a contesti diversi, anche in assenza di conoscenza completa del modello fisico sottostante.

Un'ulteriore distinzione fondamentale riguarda la natura del problema trattato. Si parla di *ROM statico* quando l'interesse è limitato a condizioni stazionarie, ovvero senza evoluzione temporale. Questi modelli sono tipicamente utilizzati per analisi statiche o quasi-statiche. Al contrario, il *ROM dinamico* è impiegato nei casi in cui è necessario rappresentare il comportamento nel tempo del sistema, come in presenza di vibrazioni, carichi variabili o fenomeni transitori. La scelta tra ROM statico e dinamico dipende dunque dalla natura fisica del problema e dagli obiettivi dell'analisi.

La costruzione di un ROM avviene generalmente attraverso due fasi distinte:

- Fase offline: si esegue una campagna di simulazioni ad alta fedeltà, ottenendo un insieme di soluzioni corrispondenti a diverse condizioni operative. Questa campagna può essere generata, ad esempio, tramite Design of Experiments (DoE). È necessario che i risultati siano associati a una mesh isotopologica, condizione che può essere soddisfatta con l'ausilio di tecniche di mesh morphing.
- *Fase online*: costruzione vera e propria del ROM che permette di fornire risposte rapide e accurate in tempo reale o quasi, al variare delle condizioni di carico o dei parametri di ingresso.

Questa suddivisione consente di spostare il carico computazionale nella fase iniziale, così da garantire efficienza e rapidità nella fase operativa. La leggera perdita di accuratezza rispetto al modello completo è generalmente tollerabile in virtù dei vantaggi computazionali ottenuti.

Nella *fase offline*, il campo di risultati associato a ciascun punto di progetto viene definito come *snapshot*, e viene salvato in un file binario contenente solo variabili della stessa grandezza fisica e quindi sarà necessario eseguire tanti ROM quanti sono i campi che si vogliono analizzare.

L'insieme complessivo degli *snapshot* prende il nome di *dataset*. Da esso, si seleziona un *training set*, ovvero il sottoinsieme di punti utilizzati per costruire il ROM, e un *validation set*, destinato alla valutazione della sua accuratezza. La scelta della proporzione tra *training* e *validation set* ha un'influenza significativa sulla qualità del modello. Tipicamente, si adotta una suddivisione 50%-50% o 80%-20% in cui il 20% dei DP viene utilizzato per la validazione del ROM.

Dal punto di vista della matematica, la prima operazione che è chiamato a fare il solutore consiste nella determinazione di una base ortonormale che rappresenti adeguatamente qualsiasi soluzione del campo nello spazio parametrico. Questo processo è svolto tramite la *Proper Orthogonal Decomposition* (POD), nota anche come decomposizione ortogonale dei modi propri [3, 12]. La POD parte da un insieme di dati (nel nostro caso *snapshot*) e cerca una base ortonormale ottimale in senso energetico per rappresentarli. Questo metodo di riduzione dell'ordine è strettamente collegato alla *Singular Value Decomposition* (SVD): infatti, si può dimostrare che la base ortonormale ottimale ottenuta con POD è equivalente ai vettori singolari più significativi ottenuti applicando la SVD alla matrice avente come vettori colonna gli *snapshot* (M). Ovvero la tecnica di decomposizione SVD applicata alla matrice M può essere usata per calcolare la POD. Ora vediamo che si applica la decomposizione SVD nel nostro caso [4].

$$\mathbf{M}_{m \times n} = \mathbf{U}_{m \times j} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{j \times j} \cdot \mathbf{V}^{\mathbf{T}}_{j \times n}$$

dove:

- M è la matrice avente come vettori colonna gli N snapshot del training set (s<sub>0</sub>, s<sub>1</sub>, ..., s<sub>N</sub>);
- $\Sigma$  è la matrice diagonale contenente i valori singolari  $\sigma_i$  della matrice M;
- U e V sono matrici ortonormali per le quali vale che  $\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{V} = \mathbf{I}_{j \times j}$ e  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^T = \mathbf{I}_{m \times m}$ .  $\mathbf{u}_i$  e  $\mathbf{v}_i$  sono rispettivamente le colonne delle matrici U e  $\mathbf{V}$ .

Per le proprietà della decomposizione SVD la matrice  $\mathbf{M}$  può essere approssimata ai ranghi inferiori (troncamento SVD) mediante una combinazione lineare dei primi r autovettori di  $\mathbf{U}$  (i modi dominanti). Chiaramente r è inferiore al rango della matrice  $\mathbf{M}$ . La matrice approssimata  $\mathbf{M}_r$  si può scrivere come:

$$\mathbf{M}_r = \sum_{i=1}^r \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T,$$

L'accuratezza dell'approssimazione può essere valutata tramite l'errore RMS relativo:

Errore RMS relativo = 
$$\frac{\|M - M_r\|}{\|M\|} = \sqrt{\frac{\sum_{i=r+1}^n \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}}$$

Ogni soluzione del campo può quindi essere scritta come combinazione lineare dei primi r modi:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{u}_i \tag{5.1}$$

La scelta ottimale del numero r di modi è un passaggio cruciale: deve essere sufficientemente grande da catturare le componenti dominanti del comportamento del sistema, ma non eccessivo da introdurre rumore o aumentare inutilmente la complessità. Per aiutare nella scelta ottimale di r, vengono tracciate due curve di errore:

- L'errore medio di proiezione, calcolato sui vettori usati nel training;
- L'errore *Leave-One-Out*, dove uno ad uno tutti gli *N* snapshot del training set viene rimosso, si ricostruisce il modello e si testa il modello sul punto escluso.

Il punto in cui le due curve iniziano a divergere rappresenta il numero ottimale di modi da utilizzare, tale aspetto verrà applicato nel Paragrafo successivo.

A questo punto, ci si vuole occupare di come determinare gli r coefficienti  $\alpha_i$ associati a una generica configurazione degli k parametri di input (ad esempio per un dato set di parametri  $P_1, P_2, \ldots, P_7$ ). L'obiettivo è costruire una funzione che, a partire da un punto nello spazio dei parametri  $\mathbb{R}^k$ , restituisca il vettore dei coefficienti modali  $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^r$ , ovvero una mappatura del tipo:

$$\mathbf{p}: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^r$$

A partire dall'equazione 5.1, è possibile calcolare i coefficienti  $\alpha_i$  corrispondenti agli *snapshot* del *training set* proiettandoli sulla base ortonormale dei modi. In particolare, il coefficiente  $\alpha_i$  associato allo *snapshot j*-esimo è calcolato come:

$$\alpha_i^{(j)} = \mathbf{u}_i^T \cdot \mathbf{x}^{(j)}$$

A questo punto, per la funzione  $\mathbf{p} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^r$ , si conoscono un numero di punti di interpolazione pari al numero di *snapshot* nel *training set*. È quindi possibile procedere all'interpolazione dei dati attraverso differenti tecniche, quali:

- Regressione lineare;
- Regressione polinomiale;
- *Kriging*;
- Support Vector Regression (SVR);
- Moving Least Squares, ecc.

Per ogni punto di progetto, l'errore del ROM viene definito come la differenza tra il campo soluzione calcolato dal solutore di riferimento  $\mathbf{x}_{ref}$  e il campo stimato dal modello ridotto  $\mathbf{x}_{ROM}$  calcolato come combinazione lineare delle colonne di U.

L'errore relativo del ROM si definisce come:

Errore relativo 
$$\text{ROM} = \frac{\|\mathbf{x}_{\text{ref}} - \mathbf{x}_{\text{ROM}}\|}{\|\mathbf{x}_{\text{ref}}\|}$$

Questo errore è composto da due contributi distinti:

• Errore di riduzione: dovuto alla scelta di un numero limitato di modi. Può essere ridotto aumentando il numero di modi considerati o espandendo il dataset di apprendimento. Se  $\mathbf{x}_{\text{proj}}$  rappresenta la proiezione del campo  $\mathbf{x}_{\text{ref}}$  sulla base dei modi, allora l'errore relativo di riduzione è:

Errore relativo di riduzione = 
$$\frac{\|\mathbf{x}_{ref} - \mathbf{x}_{proj}\|}{\|\mathbf{x}_{ref}\|}$$

• Un errore di interpolazione: deriva dal processo di interpolazione dei coefficienti modali. Il principale approccio per ridurre questo tipo di errore consiste nell'aumentare la dimensione del dataset di apprendimento.

Per ogni *snapshot* si può definire anche un errore nella stessa unità di misura dei dati in input definito come *errore massimo assoluto del ROM*:

Errore massimo assoluto ROM = max  $|\mathbf{x}_{\text{ref},i} - \mathbf{x}_{\text{rom},i}|$  con  $i = 1, \dots, N$ 

# 5.2 Risultati ROM

Il primo passo per la generazione del modello di ordine ridotto (ROM) consiste nella creazione degli *snapshot* sotto forma di file binari. In particolare, ogni *Design Point* ha un file binario associato, e nel caso in esame sono stati generati complessivamente 103 *snapshot*. A tal fine, è stato utilizzato l'*add-on Static ROM Preprocessing* di *Ansys Mechanical*, che consente di esportare il campo di soluzioni in un formato binario compatibile con la sezione *Static ROM Builder* di *Twin Builder*<sup> $\mathbb{M}$ </sup>.

Prima dell'avvio della procedura di ottimizzazione, l'*add-on* è stato inserito nell'albero del progetto in *Mechanical*, configurando come parametri in ingresso quelli utilizzati in fase di modellazione (P1, P2, P3, P9, P10, P11 e P13), tutti di natura geometrica. Successivamente, è stato selezionato il campo di soluzione di interesse, ovvero il campo di tensione all'interno della biella che comprende anche il campo di spostamenti nodali in una sottocartella chiamata *points*.

I file generati vengono salvati in una cartella dedicata, creata precedentemente all'interno della directory *user files* del progetto corrente. La struttura completa dell'albero di *Mechanical*, comprensiva dell'*add-on* e del campo di soluzioni configurato, è mostrata in Figura 5.1.



Figura 5.1: Albero *Mechanical* e impostazione del campo di risultati in *Static rom* preprocessing

Completata la fase di ottimizzazione e generati i file binari nella cartella dedicata, è possibile procedere con la generazione vera e propria del modello di ordine ridotto (ROM). Come descritto nel Paragrafo 5.1, ciascun file di *snapshot* contiene solamente variabili omogenee; pertanto, si rende necessaria la creazione di due ROM distinti: uno per il campo di tensioni e uno per la geometria.

Successivamente, è necessario definire la percentuale di *snapshot* da allocare al *training set* e al *validation set*. La selezione degli *snapshot* per il *training set* può avvenire manualmente, oppure essere affidata al solutore, il quale seleziona automaticamente un sottoinsieme con distribuzione all'interno del dominio parametrico. In una prima fase è stata adottata una suddivisione 50%-50%.

Si passa quindi alla fase di riduzione del modello (reduce), nella quale è neces-
sario individuare un numero adeguato di modi che consenta, da un lato, di ridurre la complessità computazionale del modello, e dall'altro, di catturare efficacemente le componenti dominanti del comportamento strutturale.

Per tale scelta, si vede quando la curva generata dell'errore medio di proiezione diverge rispetto alla curva d'errore generata col metodo *Leave-One-Out*. Nell'e-sempio riportato in Figura 5.2, tale valore ottimale per la rappresentazione del campo di tensioni risulta pari a 20.



Figura 5.2: Stabilire il numero di modi per rappresentare il campo di tensioni

Infine, si procede con la fase di generazione del modello ridotto (*build*). In questa fase, si analizza l'errore relativo del ROM associato a ciascuno *snapshot*; qualora vengano rilevati *snapshot* esclusi dal *training set* con errore relativo al ROM eccessivamente elevato, questi vengono aggiunti al *training set* e la procedura di generazione viene rieseguita.

Nel caso del ROM relativo al campo di tensioni, tale processo ha portato all'utilizzo dell'80% degli *snapshot* per il *training set*, corrispondenti a 83 *snapshot* complessivi.

L'intera procedura viene eseguita dapprima per il ROM relativo alla geometria, e successivamente per quello del campo di tensioni. In quest'ultima fase, il ROM geometrico viene integrato nel processo al fine di aggiornare coerentemente anche il campo degli spostamenti, altrimenti si potrebbe visualizzare unicamente la geometria *baseline* senza gli spostamenti nodali applicati dal *morphing*.

A questo punto, il ROM completo è pronto per essere visualizzato nel *viewer*, consentendo l'inserimento dei parametri di input in modo continuo nel suo range di variazione, con aggiornamento in tempo reale dei campi di risposta. L'errore massimo percentuale riscontrato nel ROM generato è del 7%, un valore accettabile. A questo punto si vuole validare il ROM testandolo sulle configurazioni ottimizzate (DP113 e 119) che non sono rientrate all'interno del *data set*. I risultati ottenuti si possono vedere in Figura 5.3 per il DP113 e in Figura 5.4 per il DP119.



Figura 5.3: Visualizzazione del ROM per la seconda configurazione ottimizzata (DP113).



Figura 5.4: Visualizzazione del ROM per la seconda configurazione ottimizzata (DP119)

	$\sigma_{\rm VM}$ FEM (N)	$\sigma_{\rm VM}$ ROM (N)	$\Delta \sigma_{\mathbf{VM}}$ [%]
DP113 DP119	$455.36 \\ 542.04$	$456.52 \\ 566.00$	-0.26 -4.42

Tabella 5.1: Confronto tra le tensioni equivalenti di Von Mises ottenute da FEM e ROM nei *Design Point* considerati.

In Tabella 5.1 sono riportati, per ciascuna configurazione ottimizzata, i valori delle tensioni massime equivalenti di Von Mises calcolati mediante analisi FEM e

quelli stimati dal modello ROM. Come si può osservare, la variazione percentuale rispetto ai risultati FEM risulta contenuta e ampiamente entro la soglia di errore massimo del 7% precedentemente definita.

### 6 Conclusioni

Il presente elaborato ha affrontato l'ottimizzazione strutturale di una biella appartenente a un motore monocilindrico a quattro tempi sviluppato da *Piaggio*, con regime operativo compreso tra 6500 e 10600 RPM. Il percorso progettuale si è articolato in diverse fasi, integrando strumenti di calcolo analitico, simulazioni FEM, metodi di ottimizzazione avanzati e modelli di ordine ridotto.

Inizialmente, è stata condotta un'analisi cinematica e dinamica del manovellismo di spinta mediante algoritmi sviluppati in *MATLAB*, che sono stati accuratamente validati confrontando i risultati con quelli ottenibili tramite metodi grafici tradizionali (costruzione A-K e diagrammi polari), nonché con i dati sperimentali forniti dall'azienda. Il confronto ha restituito errori trascurabili (0.015%) massimi, a conferma dell'affidabilità degli strumenti sviluppati. Le stesse procedure sono state poi applicate al secondo modello di verifica strutturale della biella, portando a una valida ricostruzione delle reazioni vincolari.

L'analisi FEM ha consentito di identificare la configurazione di carico più gravosa, associata al regime di 6500 RPM in corrispondenza della massima pressione in camera di combustione. È stato individuato un punto critico al di sotto dell'occhio grande della biella, su cui si è concentrata l'attività di ottimizzazione morfologica tramite mesh morphing basato su Radial Basis Functions.

Sono state perseguite due strategie di ottimizzazione: la prima ha portato alla configurazione denominata DP113, che ha consentito una riduzione significativa della tensione massima (circa 17%), a fronte di un incremento di volume inferiore all'1%, mantenendo inalterato il baricentro; la seconda, DP119, ha permesso di ottenere una riduzione della massa pari a circa il 21%, contenendo comunque la tensione massima con una riduzione dell'1.6%. Sebbene questa seconda configurazione abbia introdotto variazioni nella distribuzione di massa e nel momento d'inerzia della biella, le reazioni vincolari ricalcolate hanno mostrato variazioni contenute rispetto alla *baseline*, con scostamenti massimi inferiori al 9%. Le analisi a *buckling* hanno evidenziato coefficienti di sicurezza accettabili superiori a 4.62, anche per le configurazioni ottimizzate, con fattori critici molto vicini a quello della biella iniziale, garantendo così la stabilità strutturale. Parallelamente, l'analisi modale ha mostrato che la frequenza naturale più bassa (728Hz) resta significativamente superiore alla frequenza di rotazione del motore, escludendo fenomeni di risonanza. Le prime tre frequenze naturali risultano solo moderatamente variate rispetto alla configurazione originale, a dimostrazione del mantenimento del comportamento dinamico globale.

Infine, la costruzione di un *Reduced Order Model* (ROM) statico ha permesso di estendere la valutazione strutturale a un dominio continuo di variazione geometrica, con tempi computazionali ridotti e un errore massimo del 4.42% rispetto alle simulazioni FEM. Questo risultato conferma la bontà dell'approccio adottato e l'efficacia del ROM come strumento predittivo per future esplorazioni di progetto.

Nel complesso, la metodologia sviluppata ha dimostrato come l'integrazione di strumenti numerici, ottimizzazione geometrica e tecniche di riduzione del modello consenta di ottenere componenti alleggeriti, strutturalmente affidabili e con prestazioni dinamiche preservate. Le prospettive future includono l'integrazione del modello ROM all'interno di strumenti di *realtà aumentata*, con l'obiettivo di visualizzare in tempo reale le deformazioni o gli stati tensionali al variare dei parametri geometrici. Questo approccio renderebbe possibile un'interazione diretta ed intuitiva con il comportamento strutturale del componente, facilitando la comprensione dei fenomeni meccanici anche da parte di figure non specialistiche, oltre a rappresentare un utile strumento decisionale in fase progettuale e formativa.

# Elenco delle figure

1.1	Motore a combustione interna	4
1.2	(a) ciclo Beau de Rochas, (b) ciclo Diesel, (c) ciclo Sabathé	6
1.3	Manovellismo di spinta	7
1.4	Equazione di chiusura	8
1.5	Configurazioni del manovellismo corrispondenti al medesimo angolo $\alpha$	10
1.6	Configurazioni critiche manovellismo centrato	14
1.7	Diagramma di corpo libero manovellismo di spinta	16
2.1	Profilo velocità angolare di manovella al <i>multibody</i>	20
2.2	Modello WB fornito per validazione biella	23
2.3	Grafo meccanismo e costruzione per applicazione T.A-K	26
2.4	Applicazione T.A-K configurazione $\alpha = 212.625^{\circ} \dots \dots \dots \dots$	27
2.5	Applicatione T.A-K configuratione $\alpha = 358.759^{\circ} \dots \dots \dots \dots$	27
2.6	$\theta$ vs $\alpha$ da analisi cinematica $\ldots \ldots \ldots$	31
2.7	Verifica posizioni diagrammi polari 5_6_maxa	32
2.8	Verifica velocità diagrammi polari 5_6_maxa	33
2.9	Verifica accelerazioni diagrammi polari 5_6_maxa	34
2.10	$\omega_1 \in \alpha_1$ ricavati per modello validazione pistone a 6500 RPM	36
2.11	Confronto tra dati forniti e calcolati per modello di verifica del pistone	37
2.12	Reazioni vincolari ottenute su modello per validazione del pistone .	38
2.13	Pulizia dei dati forniti per $a_{G_x}$ a 6500 RPM $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	40
2.14	Confronto della cinematica e della dinamica per i tre regimi di	
	rotazione	42
2.15	Interpolazione pressione	44
2.16	Confronto cinematica fornita vs. verificata per $6500$ RPM	45
2.17	Confronto reazioni dinamiche fornite v s. verificate per $6500 \mathrm{RPM}$	46
2.18	$\alpha_{sporco}$ vs t	53

3.1	Mesh in modello WB fornito
3.2	Risultati condizione di carico più gravosa
3.3	Reazioni corrispondenti a condizione di carico più gravosa 78
3.4	Virtual Topology su biella
3.5	Risultati ottenuti dopo convergenza della mesh
3.6	Risultati ottenuti dopo convergenza della mesh in sezione 83
4.1	Valutazione grafica RBF
4.2	Valutazione grafica parametri del raccordo
4.3	Valutazione grafica parametri del raccordo
4.4	Superficie fissa per il morphing dello stelo prima RBF Region 96
4.5	Superficie fissa per il morphing dello stelo seconda $RBF Region$ . 97
4.6	Superficie soggetta a morphing su seconda RBF Region per lo stelo 97
4.7	Superficie dell'occhio grande soggetta a morphing 98
4.8	Azione dei parametri di morphing sullo steso e sugli occhi della biella 99
4.9	Albero <i>RBF Morph</i>
4.10	Azione del parametro P1 sul raccordo
4.11	Azione del parametro P2 sul raccordo
4.12	Azione del parametro P3 sul raccordo
4.13	Azione dei parametri P9 e P10 sullo stelo
4.14	Azione dei parametri P11 e P13 su occhio grande e piccolo 104
4.15	Named Selection e operazioni su mesh
4.16	Modello sviluppato per l'ottimizzazione
4.17	Prima ottimizzazione - DP 113
4.18	Seconda ottimizzazione - DP 119
4.19	Distribuzione delle tensioni prima ottimizzazione - DP113 112
4.20	Distribuzione delle tensioni seconda ottimizzazione - DP119 113
4.21	Utilizzo Power Surface sulla mesh del DP 113
4.22	Sistema di riferimento all'asse del cilindro e componenti del Bearing
	<i>load</i>
4.23	Schermata WB per analisi a <i>buckling</i>
4.24	Modi di <i>buckling</i> per biella vincolata con una cerniera semplice
	all'occhio grande
4.25	Modi di <i>buckling</i> per biella vincolata con una cerniera sferica all'oc-
	chio grande
4.26	Modi di vibrare per biella vincolata con una cerniera semplice al-
	l'occhio grande

Modi di vibrare per biella vincolata con una cerniera sferica all'oc- chio grande	130
Albero Mechanical e impostazione del campo di risultati in Static	
rom preprocessing	137
Stabilire il numero di modi per rappresentare il campo di tensioni . 1	138
Visualizzazione del ROM per la seconda configurazione ottimizzata	
(DP113)	140
Visualizzazione del ROM per la seconda configurazione ottimizzata	
(DP119)	141
	Modi di vibrare per biella vincolata con una cerniera sferica all'oc- chio grande

## Elenco delle tabelle

2.1	Confronto risultati per $\alpha = 212.625^\circ, 6500RPM$
2.2	Confronto risultati per $\alpha = 358.759^{\circ}, 6500 \text{ RPM} \dots 28$
2.3	Direzione e modulo delle velocità
2.4	Direzione e modulo delle accelerazioni
2.5	Verifica MATLAB configurazione 5_6_maxa
2.6	Confronto risultati per 5_6_maxa
3.1	Risultati strutturali per 6500 RPM
3.2	Risultati strutturali per 8000 RPM 77
3.3	Risultati strutturali per 10600 RPM
3.4	Caratteristiche del 42CrMo4 bonificato in funzione del diametro del
	barrotto
4.1	Tipiche funzioni radiali (RBF) con supporto globale 91
4.2	Range di variazione dei parametri di morphing
4.3	Aggiornamento range di variazione dei parametri di morphing 108
4.4	Valori dei parametri geometrici per i due DP selezionati 110
4.5	Risultati dei DP ottimizzati rispetto alla configurazione baseline 110
4.6	Variazione delle reazioni vincolari rispetto alla configurazione baseline 114
4.7	Valori di lunghezza equivalente e fattore effettivo di lunghezza $K$
	per diverse condizioni di vincolo
4.8	Risultati dell'analisi di <i>buckling</i> : confronto tra diverse configurazio-
	ni e condizioni di vincolo
4.9	Confronto tra risultati FEM e calcolo analitico con teoria di Eulero 124
4.10	Confronto tra le prime due pulsazioni naturali per diverse configu-
	razioni e condizioni di vincolo

5.1	Confronto tra le tensioni equivalenti di Von Mises ottenute da FEM	
	e ROM nei Design Point considerati.	141

#### Bibliografia

- [1] G. Augugliaro, M. Biancolini, *Optimisation of Fatigue Performance of a Titanium Connecting Rod*, Atti di conferenza, aprile 2003.
- [2] G. Belingardi, Il metodo degli elementi finiti nella progettazione meccanica, Levrotto & Bella, 1 dicembre 1998.
- [3] G. Berkooz, P. Holmes, J. L. Lumley, The Proper Orthogonal Decomposition in the Analysis of Turbulent Flows, Annual Review of Fluid Mechanics, vol. 25, pp. 539–575, 1993.
- [4] E. Di Meo, A. Lopez, C. Groth, M. E. Biancolini, P. P. Valentini, Reduced-Order Model of a Time-Trial Cyclist Helmet for Aerodynamic Optimization Through Mesh Morphing and Enhanced with Real-Time Interactive Visualization, Fluids, vol. 9, n. 12, Art. 300, 2024. DOI: 10.3390/fluids9120300.
- [5] A. Di Benedetto, E. Pennestrì, Introduzione alla cinematica dei meccanismi - Volume 1, CEA, 1 marzo 1993. ISBN: 978-8840807614.
- [6] A. Di Benedetto, E. Pennestrì, Introduzione alla cinematica dei meccanismi
  Volume 2, CEA, 1 gennaio 1993. ISBN: 978-8840807928.
- [7] A. Di Benedetto, E. Pennestrì, Introduzione alla cinematica dei meccanismi – Volume 3, CEA, 1 luglio 1999. ISBN: 978-8840809625.
- [8] M. Gambini, M. Vellini, Macchine a fluido, Texmat, 11 ottobre 2021. ISBN: 978-8888919641.
- [9] J. M. Gere, B. J. Goodno, *Mechanics of Materials*, 8<sup>a</sup> edizione, Cengage Learning, 1 gennaio 2009. ISBN: 978-0534553975.

- [10] C. Groth, A. Chiappa, F. Giorgetti, Ottimizzazione strutturale di una biella automobilistica mediante mesh morphing, Atti del 44° Convegno Nazionale AIAS – Associazione Italiana per l'Analisi delle Sollecitazioni, Università di Messina, 2–5 settembre 2015, AIAS 2015–596.
- [11] C. Groth, R. Guarino, K. Sedlak, M. E. Biancolini, Preliminary design of the cold mass supports for the EU DEMO feeders, Fusion Engineering and Design, vol. 188, 2023, Art. 113418. DOI: 10.1016/j.fusengdes.2023.113418.
- [12] G. Kerschen, J.-C. Golinval, A. F. Vakakis, L. A. Bergman, The Method of Proper Orthogonal Decomposition for Dynamical Characterization and Order Reduction of Mechanical Systems: An Overview, Nonlinear Dynamics, vol. 41, pp. 147–169, 2005.
- [13] A. Lopez, M. E. Biancolini, Development of a Reduced Order Model-Based Workflow for Integrating Computer-Aided Design Editors with Aerodynamics in a Virtual Reality Dashboard: Open Parametric Aircraft Model-1 Testcase, Applied Sciences, MDPI, vol. 12, n. 23, pp. 12153, 2022. DOI: 10.3390/app122312153.
- [14] N. P. Belfiore, A. Di Benedetto, E. Pennestrì, Fondamenti di meccanica applicata alle macchine, 3<sup>a</sup> edizione, CEA, 8 marzo 2024. ISBN: 978-8808220158.
- [15] SteelNumber, 42CrMo4 (1.7225) Alloy special steel European Steel and Alloy Grades, disponibile su: https://www.steelnumber.com/en/steel\_ composition\_eu.php?name\_id=335, ultimo accesso: 20 febbraio 2025.

### 7 Ringraziamenti

Concludendo il mio percorso triennale, desidero esprimere la mia sincera gratitudine a tutte le persone che mi hanno accompagnato lungo questo cammino.

**Al mio relatore** Un sentito ringraziamento al Prof. Marco Evangelos Biancolini per avermi seguito come relatore e per la disponibilità dimostrata durante l'intero lavoro di tesi.

**Ai miei correlatori** Ringrazio con gratitudine gli ingegneri Andrea Chiappa ed Emanuele Di Meo per il prezioso contributo fornito in qualità di correlatori. Un ringraziamento speciale va all'Ing. Emanuele Di Meo, per il supporto costante, professionale e per la sua immensa pazienza.

A Riccardo Testi Un grazie sincero all'Ing. Riccardo Testi, del team Piaggio, per aver messo a disposizione modelli e dati tecnici fondamentali, rendendo possibile la concreta realizzazione di questo progetto. Ai miei genitori Nonostante i mille litigi che non sono mai mancati, non c'è stato un solo giorno in cui abbia messo in dubbio il vostro amore. Vi ringrazierò sempre per i sacrifici che avete fatto e continuate a fare per educare me e mia sorella con amore e rispetto. Grazie per il sostegno silenzioso e per esserci stati, sempre. Durante questi anni di studio, il vostro incoraggiamento è stato il mio punto fermo. Non sarei arrivato fin qui senza di voi.

**A Marzia** Non sempre parliamo la stessa lingua, ma so che ci capiamo più di quanto sembri. Ti stimo, anche se non lo dico spesso, e ti voglio bene, anche quando fingo il contrario. Confido che il tempo, passo dopo passo, ci accompagni verso un legame ancora più profondo.

Ai miei nonni A mia nonna, che in questi giorni sta lottando con forza e coraggio: oggi non sei potuta essere qui con me, ma sento la tua presenza al mio fianco, come sempre. So che ti rialzerai, e che tornerai più forte di prima. Non ti dispiacere per l'assenza: il tuo affetto mi accompagna comunque.

A nonno Gaspare, che non c'è più, ma che sono certo, da qualche parte, sta guardando fiero questo traguardo e fa il tifo per me.

**Ai miei amici** Grazie di cuore a tutti i miei amici, per aver reso questi anni più leggeri e pieni di momenti indimenticabili.

Un pensiero speciale va a tutta OSL: Alessio, Mattia, Simone e Valerio, amici del liceo con cui ho condiviso alcuni dei ricordi più belli, dentro e fuori da scuola. Grazie per esserci sempre stati, anche a distanza.

Un ringraziamento sincero anche a Carlo, amico d'infanzia e presenza costante in ogni fase della mia vita: sapere di poter contare su di te ha sempre fatto la differenza.

E grazie ad Andrea... ti sei perso da qualche sentiero di montagna e sei finito a Ingegneria. Grazie per le centinaia, se non migliaia, di volte in cui abbiamo studiato insieme e ci siamo sostenuti in questo percorso.

**Alla mia metà** Per ultimo vorrei ringraziare il mio bene più prezioso, la persona più bella che potessi mai conoscere. A te che sei vera in un tempo tutto artificiale. Sei entrata nella mia vita e l'hai rivoluzionata. Questa tesi è soprattutto per te Vale.